20.12.37. 20 francs

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

518

BRIEFWECHSEL
CANTOR-DEDEKIND

HERAUSGEGEBEN VON

† E. NOETHER UND J. CAVAILLÈS

Göttingen Paris

PARIS

HERMANN & Cie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1937

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

518

BRIEFWECHSEL CANTOR-DEDEKIND

HERAUSGEGEBEN VON

† E. NOETHER
Göttingen

UND

J. CAVAILLÈS
Paris

PARIS
HERMANN & C^ie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1937

AVERTISSEMENT

En 1872 Cantor faisait, au hasard d'un voyage en Suisse, la connaissance de Dedekind. De cette rencontre date un échange de lettres qui, avec des interruptions, se poursuivit jusqu'en 1899 (fin de la période productive pour Cantor) et où s'éprouvèrent à peu près toutes les idées fondamentales de la théorie des ensembles.

On sait le destin par instants dramatique de Georg Cantor. Il est peu d'exemples, remarque Fraenkel (1), de vie aussi étroitement mêlée à une œuvre, de théorie, œuvre aussi exclusivement personnelle d'un seul chercheur. Dans une lettre qu'il écrivait à 17 ans, Cantor parle d' « une voix inconnue et mystérieuse » qui, contre la volonté des siens, l'appelle aux mathématiques (2). En 1872, son collègue de Halle. Heine l'incite à l'étude des séries trigonométriques. Ce sont alors en quelques années ces découvertes étonnantes — étonnantes pour leur auteur le premier : « je le vois mais ne le crois point » écrivait-il en 1877 à Dedekind à propos de l'une d'elles —, ces notions radicalement nouvelles, puissance des ensembles abstraits, débuts de topologie, arithmétique des nombres transfinis, édifice dont la hardiesse et la beauté faisaient dire à Hilbert : « qu'il représente une des plus belles créations de l'esprit mathématique » mais dont la nouveauté

---

(1) A. Fraenkel, *Georg Cantor. Jahresb. d. Deutsch. Math. Verein.* t. 39 (1930), p. 189-266, reprod. partiellement in *G. Cantor Ges. Abhandlungen*, hrgg. v. Zermelo. Berlin, Springer, 1932, p. 452. Nous lui empruntons nombre de renseignements. C'est d'ailleurs A. Fraenkel qui nous signala le premier cette correspondance.

(2) *Ibid*,, p. 453.

suscita dès le début défiance, chez Weierstrass, hostilité déclarée chez Kronecker.

En 1877 dans quelques lettres (que nous n'avons pas cru devoir reproduire ici) Cantor s'inquiète du retard apporté par le *Journal de Crelle* (dirigé par Kronecker) à publier sa démonstration sur l'identité de puissance des continus à nombre quelconque de dimensions. On y croyait voir — Cantor le premier au début — une atteinte à la notion classique de dimension. Inquiet, déjà sensible à l'atmosphère défavorable, il envisage de retirer son article, de le faire paraître en brochure séparée comme Dedekind pour *Stetigkeit u. irrationale Zahlen.* Cette fois l'alerte était vaine, mais ce fut la dernière collaboration de Cantor au *Journal de Crelle.* Les articles fondamentaux — où l'essentiel de la théorie était déjà développé — parurent dans les *Mathematische Annalen* de 1875 à 1883, au milieu d'une hostilité grandissante. Même Weierstrass, d'après le témoignage de Schoenflies (1) marquait de la froideur. Le seul appui vint de Mittag-Leffler qui ouvrit à Cantor les *Acta Mathematica* qu'il venait de fonder. On sait que, dès le Tome II, y parut une traduction française des Mémoires des *Mathematische Annalen*, faite, raconte Mittag-Leffler (2), par le groupe de jeunes mathématiciens gravitant autour d'Hermite; en particulier l'article *Quelques théorèmes sur les ensembles infinis et linéaires de points* aurait été traduit par Poincaré. C'était donc une reconnaissance partielle que confirma le succès de deux mémoires de Mittag-Leffler, *Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable indépendante* et *Démonstration nouvelle du théorème de Laurent*, où les notions cantoriennes étaient pour la première fois utilisées. Mais l'irritabilité de Cantor ne faisait que s'accroître; il savait que Kronecker le traitait de « corrupteur de la jeunesse », dénigrait publiquement ses travaux et lui interdisait l'accès de Berlin. Il s'en plaint, parfois avec une verve amusante — Kronecker est désigné par le sobriquet de « Méré », type de l'esprit étroit qui s'oppose à l'inattendu du progrès mathématique —, parfois avec un énervement maladif dans ses lettres à Mittag-Leffler autour de 1884 (3). C'est qu'à cette date apparaît l'autre aspect, le plus important du drame.

(1) A. Schoenflies, *Die Krisis in Cantors mathematischem Schaffen. Acta Math.* 50 (1928), p. 1-23.

(2) Mittag Leffler, *ibid.* p. 25.

(3) Publiées par Schoenflies, *loc. cit.*

L'édifice des ensembles était bien à grands traits ébauché dans les mémoires des *Mathematische Annalen*, mais il manquait l'indispensable couronnement, le théorème sur le continu. « De ce qui précède, on peut à l'aide des théorèmes démontrés au N° 5 conclure que le continu linéaire a la puissance de la classe II ». Ainsi s'achevait en 1882 le dernier article *Sur les ensembles infinis linéaires de points.* Au paragraphe 5 avait été prouvé que la puissance de la classe II (des ordinaux transfinis dénotant un ensemble bien ordonné dénombrable) suivait immédiatement le dénombrable. D'autre part, dans la théorie des ensembles de points on n'avait eu affaire qu'aux deux puissances dénombrable et continu (ou puissance des ensembles parfaits) : en particulier tout ensemble fermé se décompose en ensemble parfait et ensemble dénombrable ; d'où la supposition, formulée dès 1878, que ce sont là les deux seules puissances possibles. Par la solution du problème se trouverait donc effectuée la liaison entre les deux branches de la théorie des ensembles, topologie et arithmétique transfinie. L'année 1884 fut celle de l'effort le plus intense sur ce point. Le 26 octobre Cantor triomphe dans une lettre à Mittag-Leffler : « Je suis maintenant en possession d'une démonstration extrêmement simple pour ce théorème le plus important de la théorie des ensembles » [1]. Mais le 4 novembre : « heureusement je n'ai usé nulle part de cette affirmation comme moyen de démonstration... j'ai trouvé ces jours derniers une démonstration rigoureuse que le continu n'a pas la puissance de la classe II et bien plus qu'il n'a pas une puissance exprimable par un nombre ». Enfin le 15 désaveu de cette lettre — qui supposait que l'on puisse donner un exemple d'un ensemble fermé ayant la deuxième puissance — et la poursuite reprend de ce but toujours fuyant. La véritable souffrance des alternatives dans cette recherche vaine, l'isolement moral, les attaques des adversaires provoquent une crise de dépression nerveuse qui l'oblige à se réfugier un temps dans une clinique, qui le détache momentanément de son œuvre. « Ce n'est que l'idée... d'une application possible à la théorie des organismes vivants... qui m'a fait entreprendre ce travail fatigant et ingrat sur les ensembles de points. » Il demande au ministre prussien de l'instruction publique l'autorisation d'enseigner désormais la philo-

(1) A. Schoenflies, *loc. cit.*

sophie et ne s'occupe bientôt plus que de savoir si François Bacon est bien l'auteur des drames de Shakespeare. Crise dont les répercussions se prolongent une douzaine d'années pendant lesquelles il se considère surtout comme philosophe et cherche à l'infini actuel des cautions jusque dans le Moyen Age.

Cependant son œuvre véritable mûrissait : en 1897 paraît le nouvel exposé des *Contributions à la fondation de la théorie des ensembles transfinis*, plus systématique, plus rigoureux avec un développement complet de l'arithmétique transfinie. Fraenkel y voit l'influence de l'esprit ordonné de Husserl qui débutait alors à Halle. Cette fin de siècle marque aussi la reconnaissance officielle de son œuvre : au Congrès de Zurich (1897) tour à tour Hadamard, Hurwitz, Hilbert lui rendent hommage, et la même année les *Leçons sur la théorie des fonctions* de Borel en présentent un exposé partiel et une utilisation désormais classique. En reprenant ses échanges avec Dedekind, Cantor chasse les mauvais fantômes. « Je voudrais que nous restions désormais en correspondance régulière... La question Bacon-Shakespeare me laisse maintenant complètement calme; elle ne m'a fait perdre que trop de temps et d'argent. » Cependant la deuxième grande crise est déjà là : après l'impossibilité du problème du continu, voici la découverte des paradoxes. Dès 1895 — deux ans avant Burali-Forti — Cantor se heurte à l'antinomie de l'ensemble des nombres ordinaux : il essaie en 1899 de l'éviter par sa distinction entre ensemble consistant et ensemble inconsistant, par là aussi de rattraper le problème du continu. A quel point cette dernière question restait irritante pour lui, l'incident Koenig au Congrès de Heidelberg (1904) le montre assez : par un ingénieux théorème lié à tort avec un résultat de Bernstein mal interprété, Koenig semblait démontrer que la puissance du continu ne pouvait être un alef. Schoenflies a raconté [1] l'émouvante scène où Cantor adjura ses amis plus jeunes de trouver la faute, de réfuter une affirmation qui ruinait son œuvre. Cette fois le succès ne fit pas défaut : la même année Zermelo, en démontrant la possibilité de bien ordonner le continu, rendait du même coup impossibles des affirmations comme celle de Koenig. Mais le problème restait; et en 1905 le paradoxe de Russell menaçait cette fois les bases même

(1) A. Schoenflies, *Georg Cantor* in Mitteldeutsche Lebensbilder III (1928), p. 548-563.

de la théorie abstraite des ensembles. On sait que Dedekind en fut si touché qu'il refusa lontgemps une réédition de *Was sind u. was sollen die Zahlen ?*

Théorie solitaire, aujourd'hui encore, dans sa partie abstraite — celle à quoi tenait le plus Cantor — aussi inachevée, aussi incertaine aux yeux de beaucoup, bras tendu vers le ciel dans une hardiesse qui lui vaut la complaisance des hilbertiens, l'hostilité des empiristes. Mais Cantor ne s'y attachait pas comme à son œuvre propre. Contre Kronecker, « réclamant l'impartialité pour ses élucubrations..., pour mon travail c'est la partialité que j'exige, non partialité pour ma personne terrestre, mais partialité pour la vérité qui est éternelle » (1). Si « l'essence de la mathématique est la liberté » le mathématicien ne fait que découvrir un monde, immanent à son esprit, résidant en soi dans une objectivité absolue : « je ne suis quant au contenu de mes travaux que rédacteur et fonctionnaire » (2).

Ce sont les premières étapes de la découverte de ce monde que suit la correspondance avec Dedekind entre 1872 et 1883. Fraenkel y voit l'opposition entre le mathématicien de « Sturm und Drang » et le classique épris de symétrie. D'un côté, fougue créatrice, quelquefois hasardeuse, de l'autre, rigueur et critique. En effet, dans ces lettres, les uns après les autres, tous les résultats pressentis, établis par Cantor, sont d'abord soumis au jugement de Dedekind : celui-ci relève des démonstrations erronées (à propos de l'invariance de puissance des continus), en simplifie d'autres, précise enfin leur portée (comme pour le nombre des dimensions à propos de quoi il fait remarquer que c'est la bi-continuité de la mise en correspondance qui doit garantir l'invariance de la dimension). Mais il n'y a pas seulement une épreuve — à laquelle Cantor attachait tant d'importance qu'après son résultat sur la puissance des continus de dimensions quelconques, il ne déclare s'y fier, quoique sûr de la démonstration, qu'après avis de Dedekind. Outre l'autorité de son œuvre déjà importante à cette date, Dedekind apportait dans cet échange l'expérience de réflexions antérieures sur le même sujet: non seulement la définition de la continuité, donnée dans *Stetigkeit u. irrationale Zahlen*, mais les ébauches restées inédites de

(1) L. à Mittag Leffler, 26 janvier 1884 in A. Schoenflies *loc. cit. Acta Math. etc.*.
(2) « Nur Berichterstatter und Beamter », *ibid.*

cette *Systemenlehre*, à la fois topologie et théorie des ensembles abstraits. A ses travaux sur la première il fait allusion au détour d'une lettre; M^lle^ Noether a pu en retrouver quelques-uns pour l'édition des œuvres complètes. L'essentiel des réflexions sur la seconde se trouve dans les esquisses successives de *Was sind und was sollen die Zahlen ?* (de 1872 à 1887). — Esprit secret défiant de soi, « Treppenverstand » comme il se nomme, Dedekind mûrissait longuement ses idées les plus hardies, gardant au besoin des années dans son tiroir les résultats déjà obtenus. En 1899, à propos de la distinction proposée par Cantor entre ensembles consistants et inconsistants (destinée à neutraliser le paradoxe de Burali-Forti), pour laquelle il « avoue n'être pas encore au clair », la mention du théorème de l'équivalence lui fait évoquer un souvenir : « lorsque le jeune Felix Bernstein me rendit visite à Harzburg pour la Pentecôte 1897, il me parla du théorème B, p. 7, de la traduction Marotte [le théorème de l'équivalence que Bernstein venait de démontrer] et fut un peu saisi lorsque je lui dis ma conviction que ce théorème était *facile* à démontrer avec mes moyens (was sind und was sollen die Zahlen ?) ; cependant, l'entretien n'alla pas plus avant sur sa ou ma démonstration. Après son départ je m'y attelai et construisis la démonstration ci-jointe ». En 1932, prenant connaissance de cette correspondance, Zermelo eut la surprise d'y trouver exactement, aux termes près, la démonstration que lui-même découvrit et publia en 1908. Elle a sur celle de Bernstein (dont Schröder avait donné une ébauche incomplète un an avant), l'avantage de ne pas faire intervenir explicitement la suite des nombres entiers. Le curieux est que Dedekind avait déjà spontanément rédigé cette démonstration dix ans avant la visite de Bernstein : nous avons pu en effet retrouver dans ses manuscrits une feuille datée par lui 1887-7-11, qui donne, en notations cette fois de *Was sind und was sollen die Zahlen* (1) le même raisonnement ? Preuve nouvelle de la fécondité de la notion de chaîne à l'aide de laquelle en 1907 Zermelo devait démontrer le théorème du bon ordre.

La présente édition était prête il y a quatre ans. Retardée par diverses circonstances, elle paraît aujourd'hui exactement telle que

---

(1) Reproduite in *Dedekind Gesammelte Werke* Braunschweig Vieweg u. Sohn, 1932, t. III.

l'avait revue avec nous Mlle Noether, souvenir vers ces journées de Göttingen où il nous avait été donné après bien d'autres de connaître la bonté joyeuse de son accueil, l'intense rayonnement de son esprit. Je tiens à remercier les professeurs Hasse, directeur de l'Institut mathématique de Göttingen, et Sperner, éditeur du *Jahresbericht d. deutschen Mathematiker Vereinigung* pour l'amabilité avec laquelle ils m'ont accordé les autorisations nécessaires.

J. C.

Wir publizieren im folgenden die mathematischen Teile des Briefwechsels Cantor-Dedekind, mit Ausnahme der schon durch E. Zermelo in die Cantorausgabe aufgenommenen Briefe aus dem Jahr 1899 (über konsistente und inkonsistente Mengen). Vieles aus den Briefen ist fast unverändert in die späteren Publikationen übergegangen. Der Briefwechsel stammt aus dem Dedekind-Nachlass; die Briefe von Dedekind an Cantor sind Konzepte.

E. N. — J. C.

12-3-1933

CANTOR an DEDEKIND

Halle a/S. d. 28ten April 1872.

Für die freundliche Uebersendung Ihrer Abhandlung über Stetigkeit und irrationale Zahlen drücke ich Ihnen meinen ergebensten Dank aus. Wie ich mich schon jetzt überzeugt habe stimmt diejenige Auffassung des Gegenstandes, welche ich, ausgehend von arithmetischen Beschäftigungen, seit einigen Jahren mir herangebildet, mit der Ihrigen sachlich überein ; nur in der *begrifflichen Einführung* der Zahlgrössen findet ein Unterschied statt. Dass das Wesen der Stetigkeit in dem besteht, was bei Ihnen als solches hervorgehoben wird, dem stimme ich mit Ueberzeugung bei.

Halle d. 29ten Nov. 73.

Gestatten (*) Sie mir, Ihnen eine Frage vorzulegen, die für mich ein gewisses theoretisches Interesse hat, die ich mir aber nicht beantworten kann ; vielleicht können Sie es, und sind so gut, mir darüber zu schreiben, es handelt sich um folgendes.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n) ; ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x) ; so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört ? Auf den ersten Anblick sagt man sich, nein es ist nicht möglich, denn (n) besteht aus discreten Theilen, (x) aber bildet ein Continuum ; nur ist mit diesem Einwande nichts gewonnen und so sehr ich mich auch zu der Ansicht neige, dass (n) und (x) keine eindeutige Zuordnung gestatten, kann ich doch den Grund nicht finden und um den ist es mir zn thun, vielleicht ist er ein sehr einfacher.

(*) [Vgl. zu den Briefen von 1873-11-29 bis 1873-12-27 die zusammenfassenden offenbar später geschriebenen Bemerkungen von Dedekind S. 18].

Wäre man nicht auch auf den ersten Anblick geneigt zu behaupten, dass sich (n) nicht eindeutig zuordnen lasse dem Inbegriffe $\left(\frac{p}{q}\right)$ aller positiven rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$? und dennoch ist es nicht schwer zu zeigen, dass sich (n) nicht nur diesem Inbegriffe, sondern noch dem allgemeineren

$$(a_{n_1, n_2, \cdots n_\nu})$$

eindeutig zuordnen lässt, wo n_1, n_2, ... n_ν unbeschränkte positive ganzzahlige Indices in beliebiger Zahl ν sind.

Halle d. 2[ten] December 73.

Ganz ausnehmend freute es mich, heute Ihre Antwort auf mein letztes Schreiben zu erhalten. Meine Frage habe ich Ihnen aus dem Grunde vorgelegt, weil ich sie als solche mir bereits vor mehreren Jahren gestellt und mich stets im Zweifel darüber befunden habe, ob die Schwierigkeit, welche sie mir bot, eine subjective sei oder ob sie an der Sache hafte. Da Sie mir schreiben, dass auch Sie ausser Stande seien, sie zu beantworten, so darf ich das letztere annehmen. — Uebrigens möchte ich hinzufügen, dass ich mich nie ernstlich mit ihr beschäftigt habe, weil sie kein besonderes practisches Interesse für mich hat und ich trete Ihnen ganz bei, wenn Sie sagen, dass sie aus diesem Grunde nicht zu viel Mühe verdient. Es wäre nur schön, wenn sie beantwortet werden könnte; z. B., vorausgesetzt dass sie mit *nein* beantwortet würde, wäre damit ein neuer Beweis des Liouvilleschen Satzes geliefert, dass es transcendente Zahlen giebt.

Der von Ihnen gelieferte Beweis, dass sich (n) dem Körper aller algebraischen Zahlen eindeutig zuordnen lasse, ist ungefähr derselbe, wie ich meine Behauptung im vorigen Briefe erhärte. Ich nehme $n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_\nu^2 = \mathfrak{N}$ und ordne darnach die Elemente.

Ist es nicht an und für sich gut und bequem, dass man, wie von Ihnen bezeichnend hervorgehoben wird, von der n^{ten} algebraischen Zahl reden kann, so dass jede einmal an die Reihe kommt?

Wie Sie ganz richtig bemerken, lässt unsere Frage folgende Fassung zu : « kann (n) eindeutig zugeordnet werden einem Inbegriffe :

$$(a_{n_1, n_2, \ldots \ldots})$$

wo $n_1, n_2, \ldots$ unbeschränkte, positive, ganzzahlige Indices in unendlicher Anzahl sind ».

Halle d. 7ten December 73.

In den letzten Tagen habe ich die Zeit gehabt, etwas nachhaltiger meine Ihnen gegenüber ausgesprochene Vermuthung zu verfolgen ; erste heute glaube ich mit der Sache fertig geworden zu sein ; sollte ich mich jedoch täuschen, so finde ich gewiss keinen nachsichtigeren Beurtheiler, als Sie. Ich nehme mir also die Freiheit, Ihrem Urtheile zu unterbreiten, was soeben in der Unvollkommenheit des ersten Conceptes zu Papier gebracht ist.

Man nehme an, es könnten alle positiven Zahlen $\omega < 1$ in die Reihe gebracht werden :

$$\text{(I)} \qquad \omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n \cdots\cdots$$

Auf ω_1 folgend sei ω_α das nächst grössere Glied, auf dieses folgend ω_β das nächst grössere, u. s. f. Man setze : $\omega_1 = \omega_1^1$, $\omega_\alpha = \omega_1^2$, $\omega_\beta = \omega_1^3$ u. s. f. und hebe aus (I) die unendliche Reihe aus :

$$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \cdots, \omega_1^n, \cdots$$

In der übrig bleibenden Reihe werde das erste Glied mit ω_2^1, das nächt folgende grössere mit ω_2^2 bezeichnet, u. s. f. so hebe man die zweite Reihe aus :

$$\omega_1^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \cdots \omega_2^n \cdots$$

Wird diese Betrachtung fortgesetzt, so erkennt man dass die Reihe (I) sich in die unendlich vielen zerlegen lässt :

$$\text{(1)} \qquad \omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \cdots, \omega_1^n, \cdots$$

$$\text{(2)} \qquad \omega_1^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \cdots, \omega_2^n \cdots$$

$$\text{(3)} \qquad \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \cdots, \omega_3^n \cdots$$

in jeder von ihnen wachsen aber die Glieder fortwährend von links nach rechts zu ; es ist :

$$\omega_k^\lambda < \omega_k^{\lambda+1}.$$

Man nehme nun ein Intervall $(p \cdots q)$ so an, dass kein Glied der Reihe (1) in ihm liegt ; also etwa innerhalb $(\omega_1^1 \cdots \omega_1^2)$; nun könnten auch etwa sämtliche Glieder der zweiten Reihe, oder der drit-

ten ausserhalb $(p \cdot\cdot q)$ liegen ; es muss jedoch einmal eine Reihe kommen, ich will sagen die k^{te}, bei welcher nicht alle Glieder ausserhalb $(p \cdot\cdot q)$ liegen ; (denn sonst würden die innerhalb $(p \cdot\cdot q)$ liegenden Zahlen nicht in (I) enthalten sein, gegen die Voraussetzung) ; dann kann man ein Intervall $(p' \cdot\cdot q')$ innerhalb $(p \cdot\cdot q)$ fixieren, so dass die Glieder der k^{ten}, Reihe alle ausserhalb desselben liegen ; von selbst verhält sich dann $(p' \cdot\cdot q')$ in gleicher Weise in Bezug auf die vorhergehenden Reihen ; im weiteren Verlaufe muss jedoch eine k'^{te} Reihe erscheinen, deren Glieder nicht sämmtlich ausserhalb $(p' \cdot\cdot q')$ liegen und man nehme dann innerhalb $(p' \cdot\cdot q')$ ein drittes Intervall $(p'' \cdot\cdot q'')$ an, so dass alle Glieder der k'^{ten} Reihe ausserhalb desselben liegen.

So sieht man, dass es möglich ist eine unendliche Reihe von Intervallen zu bilden :

$$(p \cdot\cdot q),\ (p' \cdot\cdot q'),\ (p'' \cdot\cdot q''), \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

von denen jedes die folgenden einschliesst und die zu unsern Reihen (1), (2), (3), ... sich wie folgt verhalten :

Die Glieder der 1^{ten}, 2^{ten}, ... $k - 1^{\text{ten}}$ Reihe liegen ausserhalb $(p \cdot\cdot q)$

»	»	$k^{ten} \cdot\cdot \overline{k' - 1}^{ten}$	»	»	$(p' \cdot\cdot q')$
»	»	$k'^{ten} \cdot\cdot \overline{k'' - 1}^{ten}$	»	»	$(p'' \cdot\cdot q'')$

Es lässt sich nun stets *wenigstens* eine Zahl, ich will sie η nennen, denken, welche im Innern eines jeden dieser Intervalle liegt ; von dieser Zahl η, welche offenbar $\begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$, sieht man rasch, dass sie in keiner unserer Reihen (1), (2), ..., (n), enthalten sein kann. So würde man von der Voraussetzung ausgehend, dass alle Zahlen $\begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$ in (I) enthalten seien, zu dem entgegengesetzten Resultate gelangt sein, dass eine bestimmte Zahl $\eta \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 0 \end{smallmatrix}$ *nicht* unter (I) zu finden sei ; folglich ist die Voraussetzung eine unrichtige gewesen.

So glaube ich schliesslich zum Grunde gekommen zu sein, weshalb sich der in meinen früheren Briefen mit (x) bezeichnete Inbegriff *nicht* dem mit (n) bezeichneten eindeutig zuordnen lässt.

Halle d. 9[ten] December 73.

Für den letzthin bewiesenen Satz habe ich bereits einen vereinfachten Beweis gefunden, wonach die Zerlegung der Reihe (I) in (1), (2), (3), ... nicht mehr nöthig ist.

Ich zeige direct, dass, wenn ich von einer Reihe ausgehe,

$$\text{(I)} \qquad \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n,$$

ich in *jedem* vorgegebenen Intervalle (α .. β) eine Zahl η bestimmen kann, die nicht in (I) enthalten ist. Daraus folgt ohne Weiteres, dass der Inb. (x) dem Inbegriffe (n) nicht eindeutig zugeordnet werden kann und ich schliesse daraus, dass es unter den Inbegriffen und Werthmengen Wesensverschiedenheiten giebt, die ich bis vor Kurzem nicht ergründen konnte.

Nun bitte ich Sie sehr um Entschuldigung, dass ich Ihre Zeit so mit dieser Frage in Anspruch genommen habe,

Halle d. 10[teu] December 73.

Den Empfang Ihrer freundlichen Zeilen vom 8[ten] dss. bestätigend, bitte ich Sie, mit Bestimmtheit anzunehmen, dass mich nichts mehr erfreuen kann, als das Interesse, welches ich so glücklich gewesen, bei Ihnen für gewisse Fragen der Analysis zu erregen; gestatten Sie mir hinzuzufügen dass mich auch nichts mehr, als dieses, zu ferneren Bestrebungen anregen kann und ich darf wohl bitten, mir auch zukünftig Ihre Bemerkungen zukommen zu lassen. Sollte sicht nicht manches Gute für Ihre Theorie der algebraischen Zahlen aus der Uebersicht $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$ ergeben ? (*)

Berlin d. 25[ten] December 73.

Obgleich ich den Gegenstand, welchen ich vor Kurzem mit Ihnen zum ersten Male besprochen habe, fürs erste nicht publicieren wollte, bin ich doch unvermuthet dazu veranlasst worden. Ich theilte nämlich meine Resultate Herrn Weierstrass am 22[ten] mit ; es

(*) [In der tat hat Dedekind in der Arbeit, *Ueber die Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen* (Ges. W. Bd II, s 278) den Satz angewandt, während bei endlichen algebraischen Zahlkörpern die Existenz der endlichen Basis die Wohlordnung entbehrlich macht.]

war jedoch eben keine Zeit vorhanden, genauer darauf einzugehen ; bereits am 23ten hatte ich die grosse Freude, einen Besuch von ihm zu erhalten wobei ich ihm die Beweise mittheilen konnte ; er meinte, ich müsste die Sache, soweit sie sich auf die algebraischen Zahlen bezieht, veröffentlichen. In Folge dessen schrieb ich einen kleinen Aufsatz unter dem Titel : *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, und überschickte ihn Herrn Professor Borchardt zur Ansicht für das Journal f. Math.

Dabei kamen mir, wie Sie später finden werden, Ihre, mir so werthen, Bemerkungen und Ihre Ausdrucksweise sehr zu statten. Dies wollte ich mir erlauben, Ihnen mitzutheilen.

Berlin d. 27ten December 73.

Durch unsere in letzter Zeit gepflogene Correspondenz ist mir das Schreiben an Sie so natürlich geworden, dass ich ohne viel Besinnen meine Antworten bei der Hand habe und es fast ganz vergesse, die Häufigkeit derselben entschuldigend zu motivieren ; vielleicht liegt dies an der Aehnlichkeit unserer Interessen und weil uns die gemeinnützige Ausbildung der Wiss. in gleicher Weise am Herzen liegt.

Die Beschränkung, welche ich meinen Untersuchungen bei der Publication gegeben habe liegt zum Theil in den hiesigen Verhältnissen begründet, über welche ich Ihnen vielleicht später einmal mündlich sprechen werde, zum Theil daran, weil ich glaube, dass es zunächst darauf ankömmt, meinen Gedankengang an einem einzelnen Falle (wie derjenige der reellen algebr. Zahlen) zur Anwendung zu bringen ; die Erweiterungen desselben, deren Möglichkeit ich bereits in Menge bemerken kann, dürften alsdann später keine grosse Mühe machen und es wird nicht wesentlich sein ob ich sie gebe, oder Jemand anderes ; so habe ich also nach einer kurzen Einleitung zwei §§ abgefasst ; im ersten wird gezeigt, dass der Inbegriff der reellen algebraischen Zahlen sich eindeutig dem Inbegriffe der positiven ganzen Zahlen zuordnen lässt, im zweiten, dass, wenn eine Reihe $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ vorliegt, man in jedem Intervalle Zahlen η definiren kann, welche in ihr nicht enthalten sind.

Aufzeichnungen Dedekinds über die Briefe von 1873

1873.11.29.

Herr G. Cantor (Halle) legt mir die Frage vor, ob der Inbegriff (n) aller positiven ganzzahligen Individuen n (natürlichen Zahlen) sich dem Inbegriffe (x) aller positiven reellen Zahlgrössen x so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffs ein und nur eines des andern gehört ? — Er schliesst mit den Worten : « Wäre man nicht auch auf den ersten Anblick geneigt zu behaupten, dass sich (n) nicht eindeutig zuordnen lasse dem Inbegriffe $\left(\frac{b}{a}\right)$ aller positiven rationalen Zahlen $\frac{b}{a}$? und dennoch ist es nicht schwer zu zeigen, dass sich (n) nicht nur diesem Inbegriffe, sondern auch dem allgemeineren

$$(a_{n_1,\, n_2,\, \ldots\, n_\nu})$$

eindeutig zuordnen lässt, wo n_1, n_2, ... n_ν unbeschränkte positive ganzzahlige Indices in beliebiger Zahl ν sind ».

Hierauf habe ich umgehend geantwortet, dass ich die erste Frage nicht entscheiden könnte, zugleich aber den Satz ausgesprochen und vollständig bewiesen, dass sogar der Inbegriff aller algebraischen Zahlen sich dem Inbegriffe (n) der natürlichen Zahlen in der angegebenen Weise zuordnen lässt (dieser Satz und Beweis ist bald darauf fast wörtlich, selbst mit dem Gebrauch des Kunstausdruckes *Höhe*, in die Abhandlung von Cantor in Crelle Bd. 77 (*) übergegangen, nur mit der gegen meinen Rath festgehaltenen Abweichung, dass nur der Inbegriff aller *reellen* algebraischen Zahlen betrachtet wird). Die von mir ausgesprochene Meinung aber, dass die erste Frage nicht zu viel Mühe verdiene, weil sie kein besonderes praktisches Interesse habe, ist durch den von Cantor gelieferten Beweis für die Existenz transcendenter Zahlen (Crelle Bd. 77) schlagend widerlegt.

1873.12.2.

C. weist auf die Wichtigkeit der ersten Frage hin, weil im Falle ihrer Verneinung sich die Existenz transcendenter Zahlen (Liou-

(*) [*Ges. Abhandl.* S. 116].

ville) sich auf's Neue beweisen lasse. Er fährt fort : « Der von Ihnen gelieferte Beweis, dass sich (n) dem Körper aller algebraischen Zahlen eindeutig zuordnen lasse, ist ungefähr derselbe, wie ich meine Behauptung im vorigen Briefe erhärte. Ich nehme

$$n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_\nu^2 = N$$

und ordne darnach die Elemente. Ist es nicht an und für sich gut und bequem, dass man, wie von Ihnen bezeichnend hervorgehoben wird, von der n^{ten} algebraischen Zahl reden kann, so dass jede einmal an die Reihe kommt ? Wie Sie ganz richtig bemerken, lässt unsere Frage folgende Fassung zu : « kann (n) eindeutig zugeordnet werden einem Inbegriffe :

$$(a_{n_1, n_2, \dots})$$

wo n_1, n_2, ... unbeschränkte, positive, ganzzahlige Indices in unendlicher Anzahl sind. »

1873.12.7.

C. theilt mir einen strengen, an demselben Tage gefundenen Beweis des Satzes mit, dass der Inbegriff aller positiven Zahlen $\omega < 1$ dem Inbegriff (n) *nicht* eindeutig zugeordnet werden kann.

Diesen, am 8. December erhaltenen Brief beantworte ich an demselben Tage mit einem Glückwunsch zu dem schönen Erfolg, indem ich zugleich den Kern des Beweises (der noch recht complicirt war) in grosser Vereinfachung « wiederspiegele » ; diese Darstellung ist ebenfalls fast wörtlich in Cantor's Abhandlung (Crelle Bd. 77) übergegangen ; freilich ist die von mir gebrauchte Wendung « nach dem Princip der Stetigkeit » an der betreffenden Stelle (S. 261, Z. 10-14) vermieden !

1873.12.9.

C. schreibt mir eilig, er habe einen vereinfachten Beweis des Satzes gefunden. Da er meinen Brief nicht erwähnt, so muss letzterer wohl später angekommen sein.

1872.12.10.

C. bestätigt den Empfang meines Briefes vom 8. December, ohne die darin enthaltene vereinfachte Darstellung des Beweises zu erwähnen, dankt für mein Interesse an der Sache.

1873.12.25.

C. schreibt (von Berlin), er habe (durch Weierstrass veranlasst) einen kleinen Aufsatz verfasst unter dem Titel : *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.* « Dabei kamen mir, wie Sie später finden werden, Ihre, mir so werthen, Bemerkungen und Ihre Ausdrucksweise sehr zu statten. »

Ich antworte umgehend mit dem Rathe, die Beschränkung auf den Körper der *reellen* algebraischen Zahlen fallen zu lassen.

1873.12.27.

C. schreibt (von Berlin) : « Die Beschränkung, welche ich meinen Untersuchungen bei der Publication gegeben habe, liegt zum Theil in den hiesigen Verhältnissen begründet, über welche ich Ihnen vielleicht später einmal mündlich sprechen werde, zum Theil daran, weil ich glaube, dass es zunächst darauf ankömmt, meinen Gedankengang an einem einzelnen Falle (wie derjenige der reellen, algebraischen Zahlen) zur Anwendung zu bringen. »

Eine Aufklärung über die « Berliner Verhältnisse » habe ich nie erhalten ; auch haben wir über den Aufsatz (Crelle Bd. 77) später nicht mehr verhandelt.

CANTOR an DEDEKIND

Halle d. 5ten Januar 74.

Was die Fragen anbetrifft, mit denen ich in der letzten Zeit mich beschäftigt habe, so fällt mir ein, dass, in diesem Gedankengange auch die folgende sich darbietet :

Lässt sich eine Fläche (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und umgekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört ?

Mir will es im Augenblick noch scheinen, dass die Beantwortung dieser Fragen, — obgleich man auch hier zum *Nein* sich so ge-

drängt sieht, dass man den Beweis dazu fast für überflüssig halten möchte, — grosse Schwierigkeiten hat.

Halle d. 28tne Jan. 74.

In den comptes rendus des vorigen Jahres finde ich einen Aufsatz von Hermite, worin eine gleichzeitige Entwickelungsweise von n Exponentialgrössen e^{ax}, e^{bx}, ... e^{hx} mit äusserst geschickter Handhabung der Analysis behandelt wird und was das wichtigste scheint, er gründet darauf einen völlig sicheren Beweis für die Transcendenz der Zahl e. Mit dem Nachweise der Transcendenz von π bekennt Hermite sich viel beschäftigt zu haben, resigniert jedoch für diese Zahl mit der Bemerkung, dass es ihn sehr freuen würde, wenn dies einem andern gelänge.

Halle 18. Mai 74.

Das Bedürfniss, mich über wissenschaftliche Gegenstände mit Ihnen auszusprechen und Ihnen im persönlichen Verkehre näher zu treten, lässt in mir den Wunsch entstehen, Sie in diesem Sommer in Braunschweig gelegentlich zu besuchen.

...Wenn Sie gelegentlich mir darauf antworten wollten, so wäre es mir lieb, von Ihnen zu hören, ob Sie an der im Januar Ihnen mitgetheilten Frage hinsichtlich der Zuordnung einer Fläche und einer Linie dieselbe Schwierigkeit finden, wie ich, oder ob ich damit einer Täuschung mich hingegeben habe ; in Berlin wurde mir von meinem Freunde, dem ich dieselbe Schwierigkeit vorlegte, die Sache gewissermassen als absurd erklärt, da es sich von selbst verstünde, dass zwei unabhängige Veränderliche sich nicht auf eine zurückführen lassen.

DEDEKIND an CANTOR

.....Der von Ihnen mir mitgetheilte Einwand des Hr. I. kann, wenn ich ihn recht verstehe, meine Darstellung nicht treffen ; das in § 3. S. 18 (*) aufgestellte Princip der Stetigkeit ist doch na-

(*) [Es handelt sich natürlich um die erste Auflage von *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*]

türlich nur als die nothwendige *Ergänzung* der in § 2 S. 15 hervorgehobenen Gesetze I, II, III aufzufassen, und in II ist genau das gesagt, was Sie oder Herr I. zu vermissen scheinen ; der Einwand wäre wahrscheinlich gar nicht gemacht, wenn ich dem Princip auf S. 18 die Nummer IV vorgesetzt hätte, wie es bei den analogen Gesetzen in § 5 S. 25 wirklich geschehen ist. Oder habe ich den Einwand falsch verstanden ? dann bitte ich um Aufklärung.

Braunschweig, 11. Mai 1877.

CANTOR an DEDEKIND

Halle d. 17ten mai 1877.

Für Ihre Antwort bestens dankend, muss ich zugestehen, dass Sie auf Seite 25 Ihrer Schrift über irrationale Zahlen unter I, II, III und IV Eigenschaften anführen (*), die für das Gebiet aller reellen Zahlen durchaus characteristisch sind, so dass *kein* andres Werth system reeller Zahlen alle diese Eigenschaften zugleich mit jenem theilt.

Indessen bitte ich Sie mir die Bemerkung zu erlauben, ob nicht vielleicht doch die Betonung, welche Sie an verschiedenen Stellen Ihrer Schrift *ausdrücklich* auf die Eigenschaft IV, als *auf das Wesen* der Stetigkeit legen, zu Missverständnissen Gelegenheit geben muss, welche ohne jene Hervorhebung von IV (als das eigentliche Wesen) an Ihre Theorie, meiner Ansicht nach, nicht herantreten könnten. Im Besonderen sagen Sie in dem Vorworte, dass das von mir bezeichnete Axiom vollständig mit dem übereinstimmt, was Sie in § 3 als *Wesen* der Stetigkeit angeben. Darunter verstehen Sie aber dieselbe Eigenschaft, welche auf Seite 25 unter IV genannt ist ; diese Eigenschaft kommt aber auch dem System aller ganzen Zahlen zu, welches doch als ein Prototyp von Unstetigkeit betrachtet werden kann.

Im Interesse der auch mir so werth gewordenen Sache bitte ich Sie, wenn Sie die Zeit dazu finden, auf meine Bedenken näher einzugehen.

(*) [I : Ordnung ; II : zwischen zwei Zahlen liegen unendlich viele verschiedene Zahlen ; III : Schnitt ; IV : jedem Schnitte entspricht eine Zahl.]

P. S.

Ich erkläre mir, warum Sie auf IV einen besonderen Nachdruck legen, dadurch, dass in dieser Eigenschaft dasjenige liegt, was das vollständige Zahlgebiet unterscheidet von dem Gebiet aller rationalen Zahlen ; und dennoch scheint es mir aus obigen Gründen, dass man der Eigenschaft IV nicht den von Ihnen gebrauchten Namen : « Wesen der Stetigkeit » beilegen kann.

DEDEKIND an CANTOR

Nach Ihrem letzten Briefe scheint es mir, als ob wir Gefahr liefen, mehr um Worte als um Dinge zu streiten. Jeder aufmerksame Leser meiner Schrift wird meine Meinung über die Stetigkeit gewiss so verstehen : Gebiete mit einer Gegensätzlichkeit und Vollständigkeit ihrer Elemente, wie sie durch I und II in § 1 S. 14, § 2 S. 15, § 5 S. 25 ausgedrückt ist (III ist eine Folge von I und nur deshalb hinzugefügt, um auf IV vorzubereiten), sind darum noch nicht nothwendig stetige Gebiete ; die Eigenschaft der Stetigkeit erhalten solche Gebiete durch die Hinzufügung der Eigenschaft IV (auf S. 18 ohne Nummer, und auf S. 25) und nur durch diese Eigenschaft. Und insofern ist diese Eigenschaft als das Wesen der Stetigkeit bezeichnet.

Sie theilen mir nun durch Ihre Karte vom 10. d. M. mit, dass meine Definition der Stetigkeit nicht vollständig ist, und machen einen Verbesserungsvorschlag, um diesem Mangel abzuhelfen. Darauf lehne ich diesen Vorschlag ab, indem ich Sie auf II aufmerksam mache, worin das von Ihnen Vermisste enthalten ist. Hierauf geben Sie in Ihrem letzten Briefe zu, dass in meiner Definition eigentlich Nichts übersehen ist ; wenn ich z. B. sage : « Gebiete, welche die Eigenschaften I und II besitzen, heissen stetige, wenn sie zugleich die Eigenschaft IV besitzen », so werden Sie, wenn ich Ihren letzten Brief recht verstehe, gegen die *Vollständigkeit* einer solchen Erklärung Nichts einzuwenden haben ; aber Sie würden, wie es scheint, es lieber sehen, wenn die Eigenschaft II aus dem Relativsatze in den Conditionalsatz überginge : « Gebiete, deren Elemente eine Gegensätzlichkeit von der Beschaffenheit I besit-

zen, heissen stetige, wenn sie zugleich die Eigenschaften II *und* IV besitzen », und Sie besorgen, dass meine alleinige *Betonung* von IV als *der* Eigenschaft, in welcher das *Wesen* der Stetigkeit ausgedrückt sei, zu Missverständnissen führen könne. Diese Besorgniss theile ich nicht ; ich bin fest überzeugt, dass jeder aufmerksame Leser meiner Schrift meine Meinung so auffasst, wie ich es oben im Eingang ausgedrückt habe, und damit fällt natürlich das von Ihnen angeführte Beispiel des Systems aller ganzen rationalen Zahlen als Motiv zu einem Einwande gänzlich hinweg. Was ferner die obige Umstellung der Definition betrifft, so kann ich nicht sagen, dass sie mir gut gefällt, und aus Ihrem Postscriptum schliesse ich, dass Sie selbst, sobald Sie nur einmal den Versuch machen wollten, meine Schrift in diesem Sinne *umzuarbeiten*, mir gewiss zugeben würden, dass dann diese Schrift, welche den Fortschritt der Arithmetik vom Rationalen zum Irrationalen zum Hauptgegenstande hat, hinsichtlich des scharfen Ausdrucks ihre eigentliche Pointe verlieren würde, die lediglich in der Hervorhebung von IV besteht, da ja II schon im unstetigen, rationalen Gebiet vorhanden ist. Wenn aber Jemanden die umgestellte Definition besser gefällt, so habe ich gegen die *Berechtigung* dazu durchaus Nichts einzuwenden, namentlich dann nicht, wenn dieselbe für gewisse Untersuchungen Vortheile darbieten sollte ; aber mir gefällt meine ursprüngliche Form viel besser, und ich halte es für zweckmässiger, bei dem Wesen der Stetigkeit den Nachdruck lediglich auf IV zu legen und die Eigenschaft II schon vorher zu besprechen, ehe von Stetigkeit oder Unstetigkeit die Rede ist. Jedenfalls bestreite ich durchaus die *Nothwendigkeit* der Umformung der Definition ; wenn man dies wirklich verlangen sollte, so könnte man ebensogut auch die Frage aufwerfen, mit der ich mich auch schon beschäftigt habe, ob es nicht zweckmässig ist, auch die Eigenschaft I, soweit dies angeht, aus dem Relativsatz in den Conditionalsatz übergehen zu lassen. Dies ist durchaus keine uninteressante Frage, doch würde es viel zu weit führen, wenn ich darauf eingehen wollte. Ich glaube wirklich, wir sind verschiedener Meinung höchstens um Zweckmässigkeiten, nicht um Nothwendigkeiten, und deshalb wird wohl bei einer Fortsetzung der Debatte nicht viel mehr herauskommen.

Braunschweig, 18 Mai 1877.

CANTOR an DEDEKIND

Halle d. 20ten Juni 1877.

Für Ihr Schreiben von 18ten Mai dankend, mit dessen Inhalt ich vollkommen übereinstimme, anerkennend, dass die Verschiedenheit unserer Ansichten nur eine äusserliche war, trete ich heute wieder mit einer Bitte zu Ihnen. Sie sehen, dass die uns verbindenden theoretischen Interesen für Sie den Nachtheil haben, dass ich Sie häufiger belästige, als Ihnen vielleicht lieb ist.

Ich wünschte von Ihnen zu hören, ob Sie ein von mir angewandtes Schlussverfahren für arithmetisch strenge halten ?

Es handelt sich darum zu zeigen, dass Flächen, Körper, ja selbst stetige Gebilde von ρ Dimension sich eindeutig zuordnen lassen stetigen Linien, also Gebilden von nur *einer* Dimension dass also Flächen, Körper, ja sogar Gebilde von ρ Dimensionen, dieselbe *Mächtigkeit* haben, wie Curven ; diese Ansicht scheint der allgemein besonders unter den Vertretern der neuern Geometrie herrschenden entgegen zu sein, da man von einfach unendlichen, zweifach, dreifach, ...ρ fach unendlichen Gebilden redet und sogar manchmal die Vorstellung gefunden wird, als ob die Unendlichkeit v. Puncten einer Fläche gewissermassen durch Quadrierung, die eines Körpers durch Cubirung der Unendlichkeit von Puncten einer Linie zu gewinnen sei.

Da Gebilde von gleichviel Dimensionen auf einander *analytisch* bezogen werden können, so scheinen mir jene allgemeineren Fragen in folgende rein arithmetische Form zu bringen zu sein :

« Seien $x_1, x_2, \dots x_\rho$ ρ unabhängige veränderliche reelle Grössen, von denen jede alle Werthe annehmen kann die $\geqq 0$ und $\leqq 1$. Sei y eine $\rho + 1^{\text{te}}$ veränderliche reelle Grösse mit dem gleichen Spielraum $\left(y \begin{matrix} \geqq 0 \\ \leqq 1 \end{matrix} \right)$.

Ist es alsdann möglich die ρ Grössen $x_1, x_2, \dots x_\rho$ der einen y so zuzuordnen, dass zu jedem bestimmten Werthsystem $(x_1, x_2, \dots x_\rho)$ ein bestimmter Werth y und auch umgekehrt zu jedem bestimmten Werth y ein und nur ein bestimmtes Werthsystem $(x_1, x_2, .. x_\rho)$ gehört ? »

Diese Frage ist, *obgleich ich jahrelang das Gegentheil für richtig gehalten*, wie mir nun scheint, zu *bejahen* aus folgenden Gründen:

Jede Zahl $x \begin{smallmatrix} \geqq 0 \\ \leqq 1 \end{smallmatrix}$ lässt sich auf eine und auf nur eine Weise in Form eines *unendlichen* Decimalbruches darstellen, so dass:

$$x = \alpha_1 \cdot \frac{1}{10} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + \alpha_\nu \cdot \frac{1}{10^\nu} + \cdots$$

wo α_ν ganze Zahlen sind die $\geqslant 0$ und $\leqslant 9$. Jede Zahl x bestimmt also eine unendliche Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und umgekehrt.

Wir können also schreiben:

$$x_1 = \alpha_{1,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{1,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + \alpha_{1,\nu} \cdot \frac{1}{10^\nu} + \cdots$$

$$x_2 = \alpha_{2,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{2,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + \alpha_{2,\nu} \cdot \frac{1}{10^\nu} + \cdots$$

$$x_\rho = \alpha_{\rho,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{\rho,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + \alpha_{\rho,\nu} \cdot \frac{1}{10^\nu} + \cdots$$

Aus diesen ρ Zahlen lässt sich eine $\rho + 1^{te}$ Zahl y herleiten:

$$y = \beta_1 \cdot \frac{1}{10} + \beta_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + \beta_\nu \cdot \frac{1}{10^\nu} + \cdots$$

wenn man nimmt:

$$\text{(I)} \qquad \begin{array}{l} \beta_{(n-1)\rho+1} = \alpha_{1,n}\,; \quad \beta_{(n-1)\rho+2} = \alpha_{2,n}\,; \cdots \\ \beta_{(n-1)\rho+\sigma} = \alpha_{\sigma,n}\,; \cdots \quad \beta_{(n-1)\rho+\rho} = \alpha_{\rho,n} \end{array}$$

Da jede ganze positive Zahl ν auf eine und nur auf eine Weise in die Form gebracht werden kann:

$$\nu = (n-1)\rho + \sigma \qquad \text{wo} \qquad \sigma \begin{smallmatrix} > 0 \\ \leqq \rho \end{smallmatrix},$$

so sieht man, dass durch die Gleichungen (I) die Reihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ und daher auch y völlig bestimmt ist;

aber auch umgekehrt, wenn man von der Zahl y und folglich von der Reihe $\beta_1, \beta_2, \ldots$ ausgeht, so sind durch die Gleichungen (I) die ρ Reihen:

$$\begin{array}{l} \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\sigma,1}, \alpha_{\sigma,2}, \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\rho,1}, \alpha_{\rho,2}, \ldots\ldots \end{array}$$

und folglich auch die ρ Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ *eindeutig* bestimmt.

DEDEKIND an CANTOR

Der einzige Einwurf, den ich gegen Ihre interessante Schlussfolgerung im Augenblick erheben kann und den Sie vielleicht ohne Mühe beseitigen werden, ist folgender. Sie sagen : « Jede Zahl x ($\geqslant 0$ und $\leqslant 1$) lässt sich auf eine und auf nur eine Weise in Form eines *unendlichen* Decimalbruches derstellen, so dass

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \cdots$$

wo α_ν ganze Zahlen sind die $\geqq 0$ und $\leqslant 9$. Jede Zahl x bestimmt also eine unendliche Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und umgekehrt. » Das Unterstreichen des Wortes « *unendlichen* » lässt mich vermuthen, dass Sie den Fall eines endlichen Bruches, wo also auf ein von 0 verschiedenes α_ν nur noch die Ziffer $0 = \alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} =$ etc. folgt, ausschliessen und statt

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \frac{0}{10^{\nu+1}} + \frac{0}{10^{\nu+2}} + \cdots + \frac{0}{10^{\nu+\nu'}} + \cdots$$

stets

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_\nu - 1}{10^\nu} + \frac{9}{10^{\nu+1}} + \frac{9}{10^{\nu+2}} + \cdots + \frac{9}{10^{\nu+\nu'}} + \cdots$$

geschrieben haben wollen, um jede Möglichkeit einer doppelten Darstellung einer und derselben Zahl x auszuschliessen (die Zahl $x = 0$ selbst würde allerdings in der Form 0,0000 ... dargestelllt werden müssen ; $x = \frac{3}{10}$ aber in der Form, 0,29999 ...).

Wenn dies Ihre Meinung ist (— man könnte natürlich ebensogut den Fall ausschliessen, dass von einer bestimmten Stelle ab nur die Ziffer 9 auftritt ; dann würde aber etwas Ahnliches eintreten —), so ist mein Einwurf (*) folgender. Ich beschränke mich der Einfachheit halber auf den Fall $\rho = 2$ und setze :

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots = 0, \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu \cdots$$

$$y = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \cdots = 0, \beta_1\beta_2 \cdots \beta_\nu \cdots$$

(*) [In Cantorsche Abhandlung *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* § 7 übergegangen (Crelle J. 84, *Ges. Abhandl.*, S. 130)].

und bilde mit Ihnen aus diesen beiden Zahlen x, y jedesmal die dritte Zahl

$$z = 0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \cdots,$$

wo

$$\gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \beta_1, \gamma_3 = \alpha_2, \gamma_4 = \beta_2 \cdots \gamma_{2\nu-1} = \alpha_\nu, \gamma_{2\nu} = \beta_\nu \cdots,$$

so ist allerdings z eine völlig bestimmte Function der beiden stetigen Variabeln x, y und in demselben Intervall $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ enthalten. Allein dann giebt es doch unendlich viele echte Brüche, welchen z *niemals* gleich wird, z. B.

$$0{,}478310507090\, \alpha_7\, 0\, \alpha_8\, 0\, \alpha_9\, 0 \cdots \alpha_\nu\, 0 \cdots$$

und ebenso jeder Bruch $0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ldots$, in welchem von einer bestimmten Stelle ab entweder $\gamma_{2\nu-1}$ oder $\gamma_{2\nu}$ immer $= 0$ ist ; denn die umgekehrte Ableitung von x, y aus einem solchen z würde auf ein nicht vorhandenes (ausgeschlossenes) x oder y führen.

Ich weiss nicht, ob mein Einwurf von wesentlicher Bedeutung für Ihre Idee ist, doch wollte ich ihn nicht zurückhalten.

Braunschweig, 22. Juni 1877.

CANTOR an DEDEKIND

[Karte : Poststempel 23.6.77.]

Leider haben Sie mit Ihrem Einwurfe ganz recht ; glücklicherweise trifft derselbe aber nur den Beweis, nicht die Sache ; ich beweise nemlich *gewissermassen mehr* als in meiner Absicht lag, indem ich nemlich ein System $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ unbeschränkter reeller Veränderlicher (die $\geqslant 0$ u. $\leqslant 1$ sind) in eindeutige Beziehung zu einer Veränderlichen y bringe, die in demselben Intervalle enthalten nicht Werthe desselben annimmt, sondern alle mit Ausnahme gewisser y'' ; jeden der ihr zustehenden Werthe y' nimmt sie aber nur *einmal* an und das ist, mir scheint das Wesentliche. Denn nun kann ich y' ein eindeutige Beziehung mit einer andern Grösse t bringen, die alle Werthe $\geqq 0$ und $\leqq 1$ erhält.

Es ist mir nur lieb, dass Sie sonst bis jetzt an der Sache nichts einzuwenden gefunden ; ich werde mir erlauben Ihnen nächstens ausführlicher über diesen Gegenstand zu schreiben.

Halle 25ten Juni 1877.

Auf einer Postkarte, welche ich vorgestern an Sie gerichtet, habe ich die von Ihnen entdeckte Lücke in meinem Beweise anerkannt und zugleich bemerkt, dass ich im Stande sei sie auszufüllen, wenn ich auch ein gewisses Bedauern nicht unterdrücken kann darüber, dass sich die Sache nicht ohne compliciertere Betrachtungen erledigen lässt ; dies liegt aber wohl in der Natur der Sache und ich muss mich trösten ; vielleicht findet sich später dass die fehlende Stelle in jenem Beweise sich einfacher erledigen lässt, als es momentan in meinen Kräften stehen würde. Da mir nun aber vor allem daran gelegen ist, Sie, wenn möglich, von der Richtigkeit meines Satzes zu überzeugen, des Satzes nämlich :

(A) « Eine nach e Dimensionen ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit lässt sich eindeutig einer stetigen Mannigfaltigkeit von einer Dimension zuordnen, oder : (was nur eine andere Form desselben Satzes ist) die Puncte (Elemente) einer nach ρ Dimensionen ausgedehnten Mannigfaltigkeit lassen sich durch eine reelle Coordinate t so bestimmen, dass zu jedem reellen Werth von t im Intervalle $(0 \ldots 1)$ ein Punct der Mannigfaltigkeit, aber auch umgekehrt zu jedem Puncte der M. ein bestimmter Werth von t im Intervalle $(0 .. 1)$ gehört. »

so erlaube ich mir für denselben einen andern Beweis (*) vorzulegen, auf welchen ich sogar früher als auf jenen gestossen bin.

Ich gehe von dem Satze aus, dass jede irrationale Zahl $e \gtrless {0 \atop 1}$ sich auf eine völlig bestimmte Weise in der Form eines unendlichen Kettenbruches :

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_\nu + \ddots}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \cdots)$$

(*) [In ähnlicher Fassung veröffentlicht in der Arbeit *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Crelle J. 84 (1878), *Ges. Abhandl.*, S. 122].

darstellen lässt, wo α_ν eine positive ganze rationale Zahl ist. Zu jeder irrationalen Zahl $\gtrless\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1}$ gehört eine bestimmte unendliche Reihe α_ν und auch umgekehrt gehört zu jeder bestimmten unendlichen Reihe α_ν eine bestimmte irrationale Zahl $e \gtrless\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1}$.

Sind nun $e_1, e_2, \ldots e_\rho$, ρ von einander unabhängige Grössen, von denen jede alle irrationalen Zahlwerthe des Intervalles (0... 1) und nur diese Werthe annehmen kann, so setze man :

$$\begin{aligned}
e_1 &= (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \cdots, \alpha_{1,\nu}, \cdots) \\
e_2 &= (\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \cdots, \alpha_{2,\nu}, \cdots) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_\rho &= (\alpha_{\rho,1}, \alpha_{\rho,2}, \cdots, \alpha_{\rho,\nu}, \cdots);
\end{aligned}$$

und bestimme aus ihnen eine $\overline{\rho + 1}^{\text{te}}$ irrationale Zahl :

$$\partial = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu, \cdots)$$

durch das Gleichungssystem :

$$\text{(I)} \qquad \beta_{(n-1)\rho+1} = \alpha_{1,n}, \cdots \beta_{(n-1)\rho+\sigma} = \alpha_{\sigma,n}, \cdots \beta_{n\rho} = \alpha_{\rho,n}$$

so wird auch umgekehrt jede irrationale Zahl $\partial \gtrless\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{1}$ ein bestimmtes System $e_1, e_2, \ldots e_\rho$ vermöge (I) erzeugen.

Hier begegnet man, wie mir scheint, nicht dem Hindernisse, welches bei meinem früheren Beweise von Ihnen bemerkt worden ist.

Nun kommt es auf den Beweis des folgenden Satzes an :

> (B) « Eine veränderliche Zahl e, welche alle *irrationalen* Zahlenwerthe des Intervalles (0 ... 1) annehmen kann, lässt sich *eindeutig* einer Zahl x, welche *alle* Werthe dieses Intervalles ohne Ausnahme erhält, zuordnen. »

Denn ist einmal dieser Satz (B) bewiesen, so ordnet man die vorhin mit $e_1, e_2, \ldots e_\rho$, und ∂ bezeichneten Veränderlichen einzeln respective anderen

$$x_1, x_2, \cdots x_\rho, y$$

eindeutig zu, die alle einen unbeschränkten Spielraum im Inter-

valle (0 ... 1) haben. Dann ist hiermit auch eine eindeutige, gegenseitige Beziehung des Systemes

$$(x_1, x_2, \cdots x_\rho)$$

einerseits und der einen Variablen y andererseits hergestellt, was zum Beweise des Satzes (A) führt.

Um nun (B) zu demonstrieren, bringe man zuerst die sämmtlichen *rationalen* Zahlen des Intervalles (0 .. 1) (mit Einschluss der Grenzen) in eine Reihenform ; sie seien :

$$r_1, r_2, \cdots, r_\nu, \cdots$$

Die Werthe, welche die Veränderliche e annehmen kann, sind demnach *alle* im Intervalle (0 .. 1) *mit Ausnahme* der Zahlen r_ν.

Ferner nehme man im Intervalle (0 ... 1) nach Belieben eine unendl. Reihe ε_ν von *irrationalen* Zahlen an, die nur die Bedingungen erfüllen, dass $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ und dass $\lim(\varepsilon_\nu) = 1$ für $\nu = \infty$ und bezeichne mit f eine veränderliche Grösse, welche alle reellen Werthe $\genfrac{}{}{0pt}{}{\geqq 0}{\leqq 1}$ annehmen kann, ausgenommen die Werthe ε_ν. Es lassen sich alsdann die beiden beschränkt veränderlichen Grössen e und f in eine eindeutige gegenseitige Beziehung zu einander setzen, durch folgende Definitionen :

> wenn f keinem r_ν gleich ist, so sei das zugehörige :
>
> $$e = f;$$
>
> wenn aber $f = r_\nu$, so sei das zugehörige $e = \varepsilon_\nu$; dann überzeugt man sich leicht, dass auch umgekehrt : wenn e keinem ε_ν gleich ist, alsdann das zugehörige $f = e$ und wenn $e = \varepsilon_\nu$, alsdann $f = r_\nu$ ist.

Der Satz (B) ist nun zurückgeführt auf folgenden Satz :

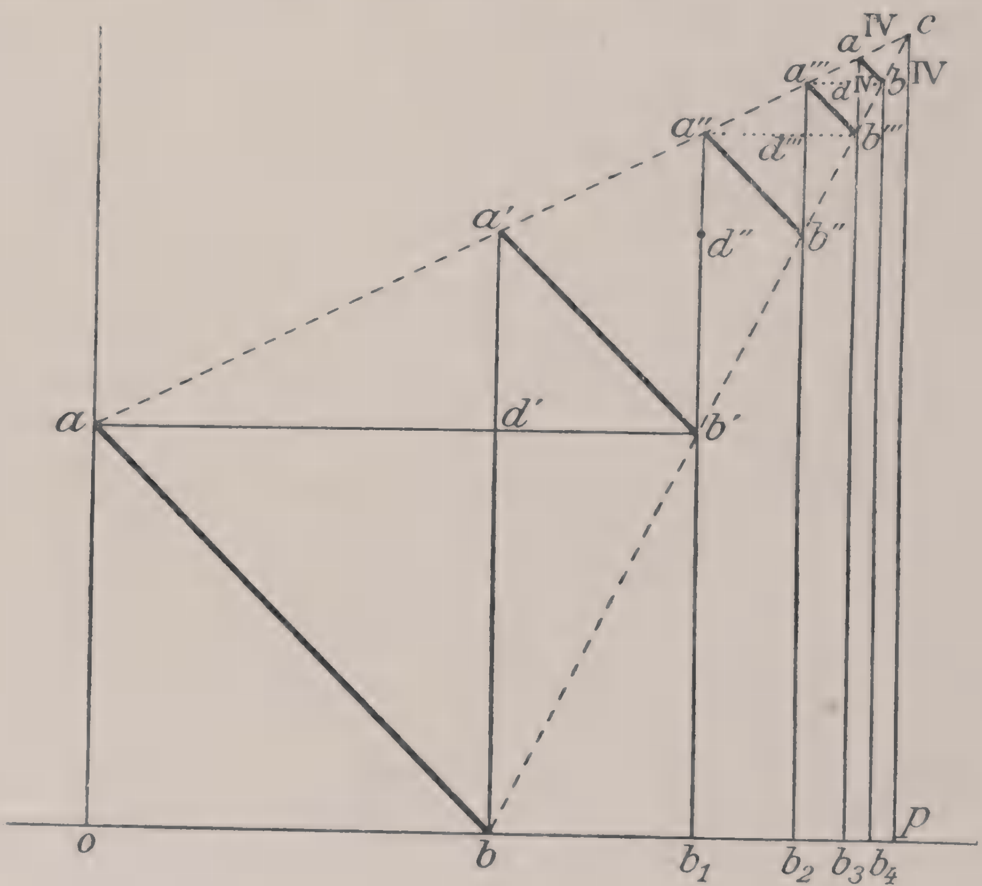
(C) « Eine Zahl f, welche alle Werthe des Intervalles (0 ... 1) annehmen kann mit Ausnahme gewisser ε_ν, die an die Bedingungen gebunden sind : $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ und $\lim \varepsilon_\nu = 1$ lässt sich einer stetigen Veränderlichen x eindeutig zuordnen, welche alle Werthe des Intervalles (0 .. 1) ohne Ausnahme erhält. »

Hier kommt uns zu statten, dass die Puncte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine *Folge* bilden und daber das Intervall (0 ... 1) durch sie in unendlich viele Theilintervalle zerlegt wird.

Es lässt sich daher, wie Ihnen nicht entgehen wird, dieser Satz (C) durch successive Anwendung des folgenden Satzes beweisen :

> (D) « Eine Zahl y welche alle Werthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$ mit alleiniger Ausnahme des Werthes 0 annehmen kann, lässt sich einer Zahl x eindeutig zuordnen, welche alle Werthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$ ohne Ausnahme erhält. »

Dieser letzte Satz (D) lässt sich nun durch die Betrachtung der nebenanstehenden, merkwürdigen Curve als wahr erkennen.



Die Coordinaten eines laufenden Punctes m derselben sind meine Grössen x, y von welchen die eine eine eindeutige Function der andern ist ; während aber x alle Werthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$ annimmt, ist der Spielraum von y der nämliche mit *alleiniger Ausnahme des Werthes 0.*

Die Curve besteht aus den unendlich vielen, immer kleiner werdenden parallelen geraden Strecken $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, $\overline{a''b''}$, ... und aus dem

Punct c. *Die Endpuncte b, b', b'', ... werden als nicht zur Curve gehörig angesehen.* Die Längen sind :

$$\overline{op} = \overline{pc} = 1 ; \overline{ob} = \frac{1}{2} ; \overline{bb_1} = \frac{1}{4}, \overline{b_1b_2} = \frac{1}{8}, \overline{b_2b_3} = \frac{1}{16} \cdots$$

$$\overline{oa} = \frac{1}{2} ; \overline{a'd'} = \frac{1}{4} ; \overline{a''d''} = \frac{1}{8} ; \overline{a'''d'''} = \frac{1}{16}, \cdots$$

Seit mehreren Jahren habe ich mit Interesse die Bemühungen verfolgt denen man sich im Anschluss an Gauss, Riemann, Helmholtz und andere zur Klarstellung aller derjenigen Fragen hingegeben hat, welche die ersten Voraussetzungen der Geometrie betreffen. Dabei fiel mir auf, dass alle in dieses Feld schlagenden Untersuchungen *ihrerseits* von einer unbewiesenen Voraussetzung ausgehen, die mir nicht als selbstverständlich, vielmehr einer Begründung bedürftig erschienen ist. Ich meine die Voraussetzung, dass eine ρ fach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit zur Bestimmung ihrer Elemente ρ von einander unabhängiger reeller Coordinaten bedarf, dass diese Zahl der Coordinaten für eine und dieselbe Mannigfaltigkeit weder vergrössert noch verkleinert werden könne.

Diese Voraussetzung war auch bei mir zu einer Ansichtssache geworden, ich war von ihrer Richtigkeit fast überzeugt ; mein Standpunct unterschied sich nur von allen anderen dadurch, dass ich jene Voraussetzung als einen Satz ansah, der eines Beweises in hohem Grade bedurfte und ich spitzte meinen Standpunct zu einer Frage zu, die ich einigen Fachgenossen, im Besonderen auch bei Gelegenheit des Gaussjubiläums in Göttingen vorgelegt habe, nemlich zu folgender Frage :

« Lässt sich ein stetiges Gebilde von ρ Dimensionen, wo $\rho > 1$ auf ein stetiges Gebilde von einer Dimension eindeutig beziehen, so dass jedem Puncte des einen ein und nur ein Punct des andern entspricht ? »

Die meisten, welchen ich diese Frage vorgelegt wunderten sich sehr darüber, dass ich sie habe stellen können, da es *sich ja von selbst verstünde*, dass zur Bestimmung eines Punctes in einer Ausgedehntheit von ρ Dimensionen immer ρ unabhängige Coordinaten gebraucht werden. Wer jedoch in den Sinn der Frage eindrang musste bekennen, dass es zum mindesten eines Beweises bedürfe, warum sie mit dem « selbstverständlichen » *nein* zu beantworten sei. Wie gesagt gehörte ich selbst zu denen, welche es für das *Wahr-*

scheinlichste hielten, dass jene Frage mit einem Nein zu beantworten sei, — bis ich vor ganz kurzer Zeit durch ziemlich verwickelte Gedankenreihen zu der Ueberzeugung gelangte, dass jene Frage ohne alle Einschränkung zu *bejahen* ist. Bald darauf fand ich den Beweis, welchen Sie heute vor sich sehen.

Da sieht man, welch' wunderbare Kraft in den gewöhnlichen reellen rationalen und irrationalen Zahlen doch liegt, dass man durch sie im Stande ist die Elemente einer ρ fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit eindeutig *mit einer einzigen Coordinate* zu bestimmen ; ja ich will nur gleich hinzufügen dass ihre Kraft noch weiter geht, indem, wie Ihnen nicht entgehen wird, mein Beweis sich ohne besondere Vergrösserung der Schwierigkeiten auf Mannigfaltigkeiten mit einer unendlich grossen Dimensionenzahl ausdehnen lässt, vorausgesetzt dass ihre unendlich vielen Dimensionen die Form einer einfach unendlichen Reihe bilden.

Nun scheint es mir, dass alle philosophischen oder mathematischen Deductionen, welche von jener irrthümlichen Voraussetzung Gebrauch machen, unzulässig sind. Vielmehr wird der Unterschied, welcher zwischen Gebilden von *verschiedener* Dimensionezahl liegt, in ganz anderen Momenten gesucht werden müssen, als in der für characteristisch gehaltenen Zahl der unabhängigen Coordinaten.

Halle d. 29ten Juni 1877.

Entschuldigen Sie es gütigst meinem Eifer für die Sache, wenn ich Ihre Güte und Mühe so oft in Anspruch nehme ; die Ihnen jüngst von mir zugegangenen Mittheilungen sind für mich selbst so unerwartet, so neu, dass ich gewissermassen nicht eher zu einer gewissen Gemüthsruhe kommen kann, als bis ich von Ihnen, sehr verehrter Freund, eine Entscheidung über die Richtigkeit derselben erhalten haben werde. Ich kann so lange Sie mir nicht zugestimmt haben, nur sagen : je le vois, mais je ne le crois pas. Und da ersuche ich Sie, mir auf einer Postkarte schreiben zu wollen, bis wann Sie die Prüfung der Sache ausgeführt haben möchten, ob ich auf die Erfüllung meiner gewiss recht anspruchsvollen Bitte rechnen darf.

Der Beweis des Satzes (C) wird sehr erleichtert durch den Gebrauch der folgenden Symbolik :

Sind a, b zwei veränderliche Grössen, die sich auf einander eindeutig beziehen lassen, so schreibe man :

$$a \sim b.$$

Ist alsdann $a \sim b$ und $b \sim c$, so ist auch :

$$a \sim c.$$

Wenn ferner a', a'', ... eine endliche oder unendliche Reihe von wohldefinirten Veränderlichen oder Constanten ist, die paarweise keine gemeinschaftlichen Werthe annehmen, deren Spielraum aber zusammengenommen genau derselbe ist wie der einer Veränderlichen a, so setze man :

$$a \equiv (a', a'', \cdots)$$

Man hat alsdann folgenden Satz :

(E) « Ist : $$a \equiv (a', a'', \cdots)$$ $$b \equiv (b', b'', \cdots)$$

und sind ferner :

$$a' \sim b'$$
$$a'' \sim b''$$
$$a''' \sim b'''$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

so ist auch :

$$a \sim b$$

Aus (D) ergiebt sich zunächst durch die Substitutionen :

$$y = \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}; \qquad x = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha},$$

folgende Verallgemeinerung von (D) :

(F) « Einer Zahl z, welche alle Werthe eines Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ mit Ausnahme von α annehmen kann, lässt sich eindeutig einer Zahl u zuordnen, die alle Werthe des Intervalls $(\alpha \ldots \beta)$ ohne Ausnahme erhält. »

Daraus folgt zunächst folgender Satz :

(G) « Eine Zahl w, welche alle Werthe des Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$ mit Ausnahme der beiden Endwerthe α, β erhält, lässt sich einer veränderlichen Zahl u eindeutig zuordnen, die alle Werthe des Intervalls $(\alpha \,.\, \beta)$ annimmt. »

Beweis. Sei γ eine Zahl $\genfrac{}{}{0pt}{}{< \alpha}{> \beta}$

w' eine Veränderliche die alle Werthe des Intervalles $(\alpha \,..\, \gamma)$ annimmt mit Ausnahme von α *und* γ. w'' eine Veränderliche die alle Werthe des Intervalles $(\gamma \,..\, \beta)$ annimmt, mit Ausnahme der einen Grenze β.

Es ist alsdann :

$$w \equiv (w', w'')$$

Wird nun mit u'' eine Veränderliche bezeichnet, die alle Werthe des Intervalles $(\gamma \,..\, \beta)$ annimmt ohne Ausnahme, mit z eine Veränderliche die alle Werthe des Intervalles $(\alpha \,..\, \beta)$ annimmt mit Ausnahme von α, so ist :

nach (F) :

(2) $$w'' \sim u'',$$

also wegen (1) und (E) :

$$w \sim (w', u'').$$

Es ist aber : $(w', u'') \equiv z$, also :

$$w \sim z.$$

Nach (F) ist aber auch :

$$z \sim u, \quad \text{folglich auch :}$$
$$w \sim u. \text{ q.e.d.}$$

Um nun (C) zu beweisen zerlegen wir f in die Veränderlichen f', f'', ... und den isolirten Werth 1, wo f' alle Werthe des Intervalles $(0 \,..\, \varepsilon_1)$ annimmt mit Ausnahme von ε_1, $f^{(\nu)}$ alle Werthe des Intervalles $(\varepsilon_{\nu-1} \,..\, \varepsilon_\nu)$ mit Ausnahme der Endwerthe $\varepsilon_{\nu-1}$ u. ε_ν. Man hat alsdann :

$$f \equiv (f', f'', f''', \cdots f^{(\nu)}, \cdots, 1)$$

Nun sei x'' eine Veranderliche die alle Werthe von $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_2)$ annimmt ohne Ausnahme,

— x^{IV} — — $(\varepsilon_3 \cdots \varepsilon_4)$

$x^{(2\nu)}$ eine Vr. die alle Werthe des Int. $(\varepsilon_{2\nu-1} \cdots \varepsilon_{2\nu})$ ann. ohne Ausnahme,

dann ist wegen (G) :

$$f'' \sim x''$$
$$f^{\mathrm{IV}} \sim x^{\mathrm{IV}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

also :

$$f \sim (f', x'', f''', x^{IV}, \cdots f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \cdots, 1)$$

Man hat aber :

$$(f', x'', f''', x^{IV}, \cdots f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \cdots, 1) \equiv x$$

mithin :

$$f \sim x.$$

DEDEKIND an CANTOR

Ihren Beweis habe ich noch einmal geprüft, und ich habe keine Lücke darin entdeckt ; ich glaube gewiss, dass Ihr interessanter Satz richtig ist, und beglückwünsche Sie zu demselben. Doch möchte ich, wie ich Ihnen schon durch die Postkarte angekündigt habe, eine Bemerkung äussern, die *gegen* die Consequenzen gerichtet ist, die Sie in Ihrem Briefe vom 25 Juni an die Mittheilung und den Beweis des Satzes geknüpft haben und die sich auf den Begriff einer stetigen Mannigfaltigkeit von ρ Dimensionen beziehen. Nach Ihren Worten könnte es scheinen — meine Auffassung kann unrichtig sein —, als ob Sie auf Grund Ihres Satzes die Bedeutung oder die Wichtigkeit dieses Begriffes in Zweifel ziehen wollten ; Sie sagen z. B. am Schlusse jenes Briefes : « *Nun scheint es mir*, dass alle philosophischen oder mathematischen Deductionen, welche von jener irrthümlichen Voraussetzung » [der Betimmtheit der Dimensionenzahl] « Gebrauch machen, unzulässig sind. Vielmehr wird der Unterschied, welcher zwischen Gebilden von *verschiedener* Dimensionenzahl liegt, in ganz andern Momenten gesucht werden müssen als in der für charakteristisch gehaltenen Zahl der unabhängigen Coordinaten. »

Hiergegen erkläre ich (trotz Ihres Satzes, oder vielmehr in Folge der durch Ihren Satz veranlassten Betrachtungen) meine Ueberzeugung oder meinen Glauben (ich habe noch nicht Zeit gehabt, auch nur einen Versuch eines Beweises zu machen) dahin, dass die Dimensionenzahl einer stetigen Mannigfaltigkeit nach wie vor die erste und wichtigste Invariante derselben ist, und ich muss alle bisherigen Schriftsteller über diesen Gegenstand in Schutz nehmen. Zwar gebe ich Ihnen gern zu, dass diese Constanz der Dimensionenzahl durchaus des Beweises bedürftig ist, und so

lange diser Beweis nicht geführt ist, darf man daran zweifeln. Ich zweifle aber nicht an dieser Constanz, obgleich sie ja durch Ihren Satz vernichtet zu sein scheint. Alle Schriftsteller haben aber offenbar die stillschweigende, ganz naturgemässe Voraussetzung gemacht, dass bei einer neuen Bestimmung der Puncte einer stetigen Mannigfaltigkeit durch neue Coordinaten diese letztern auch (im Allgemeinen) *stetige* Functionen der alten Coordinaten sein sollen, um das, was bei der ersten Ortsbestimmung als stetig zusammenhängend erscheint, bei der zweiten Ortsbestimmung ebenfalls als stetig verbunden zu erhalten. Ich glaube nun vorläufig an den folgenden Satz : « Gelingt es, eine gegenseitige eindeutige und vollständige Correspondenz zwischen den Puncten einer stetigen Mannigfaltigkeit A von a Dimensionen einerseits und den Puncten einer stetigen Mannigfaltigkeit B von b Dimensionen andererseits herzustellen, so ist diese *Correspondenz selbst*, wenn a und b *ungleich* sind, nothwendig eine *durchweg unstetige.* » Durch diesen Satz würde auch die Erscheinung erklärt werden, die sich bei Ihrem ersten Beweise Ihres Satzes herausgestellt hat, nämlich gerade die Unvollständigkeit dieses Beweises ; die Beziehung, welche Sie damals (durch Decimalbrüche) zwischen den Puncten eines ρ fachen Gebietes und den Puncten eines « Einstrecks » festsetzen wollten, wäre (oder täusche ich mich hierin) eine *stetige* gewesen, wenn sie nur auch *alle* Puncte des Einstrecks unfasst hätte ; ebenso scheint mir bei Ihrem jetzigen Beweise die *anfängliche* Correspondenz zwischen den Puncten des ρ-Strecks, deren Coordinaten sämmtlich irrational sind, und den Puncten des Einstrecks mit ebenfalls irrationaler Coordinate in gewissem Sinne (Kleinheit der Aenderungen) so stetig zu sein, wie möglich ; aber die Ausfüllung der Lücken zwingt Sie, eine grauenhafte, Schwindel erregende Unstetigkeit in der Correspondenz eintreten zu lassen, durch welche Alles in Atome aufgelöst wird, so dass jeder noch so kleine stetig zusammenhängende Theil des einen Gebietes in seinem Bilde als durchaus zerrissen, unstetig erscheint.

Ich hoffe, mich deutlich genug ausgedrückt zu haben ; die Absicht meines Schreibens besteht nur darin Sie zu bitten, nicht ohne eine gründliche Prüfung meines Einwandes gegen die bisher ür wahr gehaltenen Glaubensartikel der Mannigfaltigkeitslehre öffentlich zu polemisieren.

Braunschweig, 2. Juli 1877.

CANTOR an DEDEKIND

[Karte : Poststempel 2.7.77]

Ich freue mich sehr, dass Sie die Sache geprüft und richtig befunden haben. Ich bitte Sie bei Ihrem Vorhaben zu bleiben und mir ausführlicher und eingehender Ihre Ansichten über den Sinn des Resultates mitzutheilen ; ich möchte darnach mein Urtheil über die weitere Verfolgung der Sache bilden.

Halle d. 4. Juli 1877.

Ich war sehr erfreut über Ihren Brief v. 2ten Juli und danke Ihnen für Ihre eingehenden und ausserordentlich treffenden Bemerkungen.

Durch die Schlussworte meines Briefes v. 25ten Juni habe ich gegen meine Absicht den Schein hervorgerufen, als wollte ich durch meinen Beweis dem Begriffe der ρ fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit überhaupt entgegentreten, während mein ganzes Streben vielmehr darauf gerichtet ist, ihn zu klären und auf den richtigen Standpunct zu führen. Wenn ich sagte : « nun scheint es mir, dass alle philosophischen und mathem. Deduktionen, welche von jener irrthümlichen Voraussetzung Gebrauch machen — » so meinte ich mit dieser Voraussetzung *nicht* « die Bestimmtheit der Dimensionenzahl », sondern die Bestimmtheit der unabhängigen Coordinaten, deren Anzahl von gewissen Autoren unter allen Umständen gleich der Anzahl der Dimensionen vorausgesetzt wird, während, wenn man den Coordinatenbegriff *allgemein* fasst, ohne jede Voraussetzung über die Natur der vermittelnden Functionen, die Anzahl der unabhängigen, eindeutigen, vollständigen Coordinaten, wie ich gezeigt, auf jede vorgegebene Zahl gebracht werden kann. Ich bin auch Ihrer Ansicht, dass, wenn die Beschränkung gemacht wird, dass die Correspondenz eine stetige sein soll, alsdann nur Gebilde von gleich viel Dimensionen sich eindeutig auf einander werden beziehen lassen und dass auf diese Weise in der Zahl der unabhängigen Coordinaten eine Invariante gewonnen werden kann, welche zur Definition der Dimensionenzahl eines stetigen Gebildes führen dürfte.

Ich vermag jedoch noch nicht zu erkennen, bis welchem Grade die Schwierigkeiten auf diesem Wege (zu dem Begriffe der Dimensionenzahl zu gelangen) steigen können, weil ich nicht weiss, ob man im Stande ist, den Begriff der *im Allgemeinen stetigen Correspondenz* zu begrenzen. Von der Möglichkeit einer solchen Begrenzung scheint mir aber auf diesem Wege Alles abzuhängen.

Eine fernere Schwierigkeit glaube ich darin zu erkennen, dass dieser Weg versagen dürfte, sobald das Gebilde aufhört ein durchweg stetiges zu sein ; und dennoch möchte man doch auch in diesem Falle Etwas der Dimensionenzahl entsprechendes haben, um so mehr, als von den in der Natur vorkommenden Mannigfaltigkeiten ihre durchgehende Stetigkeit schwer nachzuweisen scheint.

Ich möchte Ihnen durch diese Zeilen nur andeuten, dass ich, weit davon entfernt, mein Resultat gegen die Glaubensartikel der Mannigfaltigkeitslehre unbedingt kehren zu wollen, vielmehr vom Wunsche erfüllt bin, durch dasselbe zur Sicherstellung ihrer Sätze, so weit als möglich, Etwas beitragen zu können. Ich möchte heute Ihre Zeit nicht mehr in Anspruch nehmen und bitte Sie noch, falls Sie Zeit finden sollten, die sich aufdrängenden Fragen zu untersuchen, solches nicht zu verschmähen und mich alsdann mit Ihren Resultaten bekannt machen zu wollen.

Halle d. 23ten Oct. 1877.

.....Ueber die in dem vergangenen Sommer geführte Untersuchung liegt seit einem viertel Jahr bei Herrn Borchardt eine von mir gefertigte Ausarbeitung unter dem Titel : ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Ich hoffe, dass sie nächstens erscheinen wird. Da ich bei derselben von Ihrer freundlichen Berathung Nutzen ziehen durfte, so interessiert es Sie vielleicht, dass ich für einen meiner Sätze einen noch einfacheren Beweis (*) gefunden habe. Wenn zwei wohldefinierte Mannigfaltigkeiten sich eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuordnen lassen, so bediene ich mich der Ausdruckweisen, dass sie *gleiche Mächtigkeit* haben, oder auch dass sie *aequivalent* sind ; ebenso nenne ich zwei reelle Veränderliche a u. b *aequivalent*, wenn sie sich ein-

(*) [*Ein Beitrag z. Mannigfaltigkeitslehre* § 6 (*Ges. Abhandl.*, S. 129)].

deutig und vollständig einander zuordnen lassen und ich schreibe in diesem Falle, wie Sie wissen :

$$a \sim b.$$

Es handelt sich nun um den folgenden Satz :

« Ist e eine Veränd., welche alle irrationalen Werthe $\begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$ anzunehmen hat, x eine solche, welche alle rationalen und irrationalen Werthe, die $\geqq 0$ u. $\leqq 1$ sind, erhält, so ist :

$$e \sim x.$$

Beweis. Sei φ_ν das allgemeine Glied einer Reihe, welche aus allen rationalen Zahlen, $\geqq 0$ u. $\leqq 1$, besteht ; sei η_ν das allg. Glied einer Reihe, von irgend welchen, ungleichen, irrationalen Zahlen $\begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix}$ Z. B. :

$$\eta_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}$$

h möge die Veränderliche bedeuten, welche alle Werthe des Intervalles $(0 \ldots 1)$, mit Ausnahme der φ_ν und der η_ν, erhält.

Dann ist :

$$(1) \qquad x \equiv \{ h, \eta_\nu, \varphi_\nu \}$$
$$e \equiv \{ h, \eta_\nu \}.$$

Für die letzte Formel können wir auch schreiben :

$$(2) \qquad e \equiv \{ h, \eta_{2\nu - 1}, \eta_{2\nu} \}.$$

Vergleicht man die Formeln (1)und (2) und bemerkt, dass :

$$h \sim h ; \qquad \eta_\nu \sim \eta_{2\nu - 1} ; \qquad \varphi_\nu \sim \eta_{2\nu},$$

so folgt :

$$x \sim e, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Haben Sie vielleicht die Frage weiter untersucht, ob bei der Begriffsbestimmung der n-fachen, stetigen Manigfaltigkeit die Bedingung der stetigen Correspondenz ausreicht, damit der Begriff ein gegen jeden Widerspruch gesicherter, in sich gefestigter werde ?...

P. S. — In Lipschitz's neues Lehrbuch der Analysis habe ich hineingesehen ; gefällt es Ihnen ?

DEDEKIND an CANTOR

1877.10.27

...Doch *glaube* ich noch immer, dass der Begriff der Dimensionenenzahl durch die Bedingung der *stetigen* Correpondenz seinen Invarianten-Charakter wirklich erhält.

Das Werk von Lipschitz enthält, so weit ich es bis jetzt habe durchsehen können, viel Gutes und Interessantes ; meiner kritischen Natur gemäss habe ich zwar an einigen Puncten etwas auszusetzen, aber ich finde es doch sehr erfreulich, dass hier ein ernstlicher Versuch gemacht ist, mathematische Strenge auch in einem *Lehrbuche* walten zu lassen. An der Begründung der Irrationallehre bei der er sich fast ganz Ihrer, zuerst von Hr. Heine veröffentlichten Darstellung anschliesst, habe ich höchstens das auszusetzen, dass (auf S. 46) eine eigentlich ganz neue *Annahme* (« Alsdann fällt der Grenzwerth $\mathfrak{G}$ » u. s. w.) scheinbar wie eine selbstverständliche *Folge* des Frühern dargestellt wird ; ausserdem kann ich die Richtigkeit der Schlussbemerkung in § 14 über die Griechen nicht zugeben (*)...

CANTOR an DEDEKIND

Halle a /Saale d. 29ten Dec. 1878.

.....Sie werden wohl auch in den Besitz des Werkes « fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali di *Ulisse Dini*, Pisa 1878 » gelangt sein. Es scheint mir dasselbe mit Sachkenntniss und vielem Geschick verfasst zu sein ; zur Einführung der Zahlen bedient er sich Ihrer Methode. — Obgleich ich mit derselben vollkommen übereinstimme, so glaube ich dennoch, dass ihr die von mir in einer Arbeit über trigonometrische Reihen (**) angedeutete aequivalent ist und dass durch die formelle Unterscheidung von

(*) [Vgl. die Korrespondenz Dedekinds mit Lipschitz in *Dedekinds gesammelten Werken*, Bd. III, S. 469-479].

(**) [*Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus d. Theorie d. trigonometrischen Reihen. Math. Ann.* Bd. V (1872) S. 123 (*Ges. Abhandl.*, S. 95)].

Zahlgrössen verschiedener Ordnung, womit ich *allein* die verschiedenen Modi ihres Gegebenseins durch einfach unendliche Reihen, (deren Glieder mit wachsendem Index sich *einander* unendlich nähern) zum Ausdruck bringen wollte, die Gefahr nicht eintritt, dass man glauben könnte, ich hätte das Gebiet der reellen Zahlen erweitern wollen. Ein solcher Missgriff ist von mir *nie auch nur entfernt* beabsichtiget worden ; ich sage ausdrücklich in meiner Arbeit, dass jede von mir mit c bezeichnete Zahl einer Zahl b gleichgesetzt werden kann. Uebrigens ist dieser Missgriff, von einer andern Seite wirklich gemacht worden, so unerhört dies auch klingen mag ; ich weiss nicht, ob Ihnen Thomaes Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen bekannt ist ; in der zweiten Auflage pag. 9 findet man Zahlen (*), welche (horribile dictu) kleiner als jede denkbare reelle Zahl und dennoch von Null verschieden sind (**).

Ueber die Frage, ob sich stetige Mannigfaltigkeiten mit verschiedener Dimensionenzahl einander eindeutig und stetig zuordnen lassen oder vielmehr über den Satz dass dies nicht möglich ist, ist seit dem Erscheinen meiner Arbeit über Mannigfaltigkeitslehre von Thomae, Lüroth, Jürgens und vor einigen Tagen im Borchardtschen Journal von Netto geschrieben worden (***) ; es scheint mir jedoch die Sache noch nicht ganz fertig gestellt zu sein.

(*) [Es handelt sich um die Ordnungen des Verschwindens einer Funktion, in deren Darstellung — als nicht-archimedisches Grössengebiet — Thomae sich merkwürdigerweise mit den kurz vorher veröffentlichten Untersuchungen von Du Bois Reymond (*Annali di Mat.* IV. 1871) begegnet].

(**) [Für diesen oft (*Ges. Abhandl.* S. 156, 172 usw.) betonten Ausschluss der aktual unendlich kleinen Grössen vgl. den Brief an Weierstrass 16 Mai 1887 (*Mitteilungen z. Lehre v. Transfiniten VI*, *Ges. Abhandl.* S. 408), wo Cantor einen Beweis gefunden zu haben glaubt. In Wirklichkeit war der einzige Grund seine Definition des Kontinuums als zusammenhängenden — das heisst dem Archimedischen Axiom unterworfenen—Systems.]

(***) [Thomæ, *Sätze aus d. Funct. Theorie*, *Gottinger Nachrichten* 1878, Lüroth, *Abbildung v. Mannigfaltigk. verschied. Dimens. auf einander*, Erlangen, *Phys. med. Soc.*, *Sitz.-Ber.* 10 (1878), Jürgens, *Ueber eindeutige u. stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, *Tagebl. d. Versamml. Deutsch. Naturforscher u. Aerzte* in Cassel 1878, Netto, *Zur Mannigfaltigkeitslehre*, *Borch. J.* 86 (1879)].

Halle a/Saale d. 17ten Janv. 79.

Die Frage über die eindeutige und *stetige* Abbildung von Mannigfaltigkeiten welche durch meine Untersuchungen nahe gelegt war, glaube ich nun in der einfachsten und strengsten Weise erlediget zu haben, indem ich sie auf den bekannten Fundamentalsatz der Analysis zurückführe, nach welchem.

(I) eine stetige Function *einer* stetigen Veränderlichen t, welche für $t = t_0$ einen negativen Werth, für $t = t_1$ einen positiven Werth annimmt, dazwischenmindestens einmal Null wird.

Die bezüglichen Versuche von Thomae und Netto leiden, wie Sie vielleicht bemerkt haben werden, an Unvollkommenheiten; so z. B. bezieht sich Thomae auf einen *für ihn* unbeweisbaren Satz (*) Riemanns (Gesammelte Werke pag. 450, (1): Ein Vielstreck von weniger als $\overline{n-1}$ Dimensionen etc. etc.); während, wie ich nun deutlich erkannt habe, dieser Riemannsche Satz mit dem sogleich zu beweisenden für den Fall $\nu = n - 1$ gewissermassen aequivalent ist; da nun aber $n - 1$ ebenso allgemein ist wie die Zahl n, so dreht sich Thomae bei seinem Beweise gewissermassen im Kreise.

Der allgemeine Beweis, welchen ich sogleich bringen will, ist mir eigentlich schon lange bekannt, nämlich über ein Jahr; ich hielt ihn jedoch bisher nicht für streng und hütete mich darum wohl, vom ihm zu reden. Die Entdeckung, welche ich vor einigen Tagen machte, besteht daher im Grunde nur darin, dass er strenge ist. Die Täuschung in welcher ich mich befand, beruhte darauf, dass im Beweise die vorkommenden Beziehungen nicht auf *beiden Seiten* eindeutige sind. Die vorkommende *Mehrdeutigkeit* schadet aber aus dem Grunde *nicht* weil sie stets nur beim Uebergange vom höheren zum niederen Gebilde auftritt (**).

Im folgenden verstehe ich unter einer Kugel p^{ter} Ordnung das stetige Gebilde p^{ter} Ordnung, welches aus einer $\overline{p+1}$ fachen

(*) Er nennt ihn: Axiom.

(**) [Bekanntlich wird der Satz bei Mehrdeutigkeit doch falsch, wie schon die Peanokurve zeigt. Der obige Beweis ist publiziert: *Ueber einen Satz aus d. Theorie d. stetigen Mannigfaltigkeiten. Götting. Nachrichten,* 1879 (*Ges. Abhandl.* S. 134)].

Mannigfaltigkeit, deren Coordinaten $x_1, x_2, \dots x_{p+1}$, durch eine Gleichung :

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots (x_{p+1} - a_{p+1})^2 = r^2,$$

ausgesondert ist, so dass hiernach z. B. die Kreislinie in der Ebene ein Kugel 1^{ter} Ordung wäre.

Der zu beweisende Satz ist nämlich in der nun erweiterten Fassung dieser :

« Eine stetige M_μ und eine stetige M_ν lassen sich, falls $\mu < \nu$ nicht *stetig* so einander zuordnen, dass zu jedem Elemente von M_μ *ein einziges* Element von M_ν und zu jedem Elemente von M_ν *ein oder mehrere* Elemente von M_μ gehören. »

Dieser Satz ist für den Fall $\nu = 1$ unmittelbar klar. Um ihn allgemein zu beweisen setzen wir seine Richtigkeit für $\nu = n - 1$ voraus und zeigen dass er alsdann auch für $\nu = n$ wahr ist.

Zu dem Ende setzen wir stetige Beziehung einer M_μ und einer M_n, wo $\mu < n$, voraus, so dass beim Uebergange von M_μ zu M_n *Eindeutigkeit* herrscht ; und zeigen dass dieser Annahme ein innerer Widerspruch zu Grunde liegt oder besser ein Widerspruch gegen oben angeführten Fundamentalsatz I.

Seien a und b zwei innere Puncte von M_μ, A und B die entsprechenden Puncte von M_n.

Um A als Mittelpunct construiren wir in M_n eine Kugel $\overline{n-1}^{\text{ter}}$ Ordnung K_{n-1}, welche nur so klein sei, dass der Punct B ausserhalb des von derselben begrenzten Raumes liegt.

Um a als Mittelpunct construieren wir in M_μ gleichfalls eine Kugel $\overline{\mu-1}^{\text{ter}}$ Ordnung $K_{\mu-1}$, welche nur so klein sei, dass 1) der Punct b ausserhalb derselben liegt und dass auch.

2) das dieser Kugel in M_n entsprechende stetige Gebilde $\overline{\mu-1}^{\text{ter}}$ Ordnung $G_{\mu-1}$ ganz im Innern des von der Kugel K_{n-1} begrenzten Raumes liege, was wegen der Stetigkeit der Beziehung in der Nähe der Puncte a und A erreicht werden kann.

Sei z ein beliebiger Punct von $K_{\mu-1}$, ζ der entsprechende Punct von $G_{\mu-1}$; wir ziehen den geradlinigen Strahl $A\zeta$, er trifft in dieser Richtung verlängert die Kugel K_{n-1} in einem einzigen, bestimmten Punte Z.

So entspricht also *mittels dieser Construction* jedem Punct z von $K_{\mu-1}$ *ein* Punct Z von K_{n-1}, der sich mit z stetig ändert.

Der Punct Z kann aber hierbei nicht alle Puncte von K_{n-1}

erreichen, *da dies gegen unsern Satz für den als bewiesen angenommenen Fall* $\nu = n - 1$ *verstossen würde.*

Wir schliessen daher mit Sicherheit, dass es Puncte P der Kugel K_{n-1} giebt, welche vom Puncte Z nicht erreicht werden ; zieht man von A aus zu einem solchen Puncte P den Strahl AP, so trifft derselbe das Gebilde $G_{\mu-1}$ *nicht.*

Verbinden wir nun P noch mit dem ausserhalb K_{n-1} liegenden Puncte B durch eine im Raume M_n verlaufende stetige Curve, so erhalten wir

(II) eine zusammengesetzte stetige Linie APB, *welche mit dem Gebilde* $G_{\mu-1}$ *keinen Punct gemeinsam hat.*

Dieser Linie entsprechen bei der zu Grunde gelegten stetigen Beziehung von M_μ und M_n, eine oder mehrere Curven in M_μ welche von a nach b stetig hinlaufen und dabei

(III) wegen des Fundamentalsatzes I die Kugel $K_{\mu-1}$ *nothwendig mindestens einmal treffen müssen.*

Diese beiden Thatsachen II und III widersprechen einander ; also ist die Annahme einer stetigen Beziehung von M_μ und M_ν eine unrichtige, und unser Satz ist für den Fall $\nu = n$ bewiesen.

Ich denke daran, da mich die Göttinger Academie vor Kurzem zu ihrem correspondierenden Mitgliede gemacht hat und da Thomae seinen Beweis in den Göttinger Anzeigen hat abdrucken lassen, diesen Beweis ebenfalls hinzuschicken ; da wäre es mir sehr lieb, Ihre Ansicht über die Sache vorher zu hören.

DEDEKIND an CANTOR

Ihren Beweis habe ich mit Aufmerksamkeit studiert, und es ist mir nur eine Kleinigkeit darin begegnet, die Zweifel erregen könnte. Nachdem Sie um den Punct A von M_n eine Kugel K_{n-1}, und um den Punct a von M_μ eine Kugel $K_{\mu-1}$ construiert haben, deren Bild in M_n mit $G_{\mu-1}$ bezeichnet wird, geben Sie eine hierauf gestützte Abbildung von $K_{\mu-1}$ auf K_{n-1} : dem Puncte z von $K_{\mu-1}$ correspondiert ein bestimmter Punct ζ in $G_{\mu-1}$, der Durchschnitt Z des Strahls $A\zeta$ mit K_{n-1} wird als ein neues Bild von z angesehen. Nun ist aber denkbar, dass ζ mit A zusammenfällt, weil Sie zulassen dass *mehreren* Puncten von M_μ ein und derselbe Punct von M_n entspricht ; in diesem Falle würde das Bild Z

im Allgemeinen *unbestimmt* werden. Die hieraus entspringende Schwierigkeit ist offenbar leicht zu heben, sobald die Anzahl der Puncte a' in M_μ, denen derselbe Punct A in M_n entspricht, *endlich* ist, weil man den Radius der Kugel $K_{\mu-1}$ nur so klein zu wählen braucht dass die übrigen Puncte a' jenseits fallen. Wenn aber die Anzahl der Puncte a' unendlich gross ist, so sehe ich für den Augenblick in dem genannten Umstande eine wirkliche Schwierigkeit, und dieselbe pflanzt sich auf noch eine zweite Stelle Ihres Beweises fort. Sie sagen nämlich, der Linie APB werden eine oder mehrere Linien in M_μ entsprechen, welche stetig von a nach b führen; dies würde meiner Meinung nach *selbst dann* noch einer näheren Erläuterung und Begründung bedürfen, wenn B das Bild nur von einem oder nur von einer *endlichen* Anzahl verschiedener Puncte b' in M_μ ist; wenn aber unendlich viele Puncte b' in M_μ dasselbe Bild B in M_n besitzen, so wird die Existenz einer von a nach b stetig führenden Linie, deren Bild die Linie APB sein soll, noch etwas zweifelhafter. Ich *glaube* übrigens, der Satz bleibt auch dann noch wahr, wenn in der Annahme gestattet wird, dass jeder Punct in M_n das Bild von unendlich vielen verschiedenen Puncten in M_μ sein darf. Vielleicht werden Sie auch die genannten beiden Schwierigkeiten augenblicklich beseitigen. Bei einer Publication würde ich es für wünschenswerth halten, wenn die Namen oder Kunstausdrücke der Mannigfaltigkeitslehre (beiläufig gesagt, ich würde dem ebenfalls Riemann'schen Wort « Gebiet » seiner Kürze halber entschieden den Vorzug vor dem schwerfälligen Worte « Mannigfaltigkeit » geben) recht genau definiert würden; es wäre sehr verdienstlich, wenn diese ganze « Gebietslehre » ab ovo dargestellt würde, ohne die geometrische Anschauung zuzuziehen, und dabei müsste z. B. der Begriff einer von dem Puncte a nach dem Puncte b innerhalb des Gebietes G stetig führenden Linie recht bestimmt und deutlich definiert werden. Die Definitionen von Netto (dessen Abhandlung mir sehr wohl gefällt, und dessen Beweis, wie ich glaube, mit einigen Modificationen ganz zutreffend wird) enthalten einen guten Keim, aber sie scheinen mir der Vereinfachung und zugleich einer Vervollständigung fähig. Ich würde mir ein solches Urtheil nicht erlauben, wenn ich nicht vor vielen Jahren, als ich noch die Dirichlet'sche Potentialvorlesung herausgeben und dabei das sogenannte Dirichlet'sche Princip strenger begründen wollte, mich schon recht

viel mit solchen Fragen beschäftigt hätte. Ich habe einige solche Definitionen (*), die mir eine recht gute Grundlage zu geben scheinen, aber ich habe später die ganze Sache liegen lassen, und könnte für den Augenblick nur Unvollständiges geben, da ich durch die Umarbeitung der Dirichlet'schen Zahlentheorie ganz in Anspruch genommen bin. Ihre Mittheilung hat mich aber, wie ich wohl kaum zu versichern brauche, in hohem Grade interessirt, und indem ich Ihnen meinen besten Dank für dieselbe ausdrücke, verbleibe ich mit herzlichem Grusse...

Braunschweig, 19. Januar 1879.

CANTOR an DEDEKIND

[Karte : Poststempel 20.1.79.]

In meinem Ihnen am 17ten dss übersandten Beweise finde ich einen, wenn auch *nicht erheblichen* Punct zu verbessern.

Man geht *besser* von zwei innern Puncten A. u. B *von* $\underline{M_n}$ aus, denen innere Puncte von M_μ entsprechen.

Einer von den dem Puncte A enstprechenden inneren Puncten sei a, während *alle* dem Puncte B entsprechenden : $b, b', b'', \ldots..$ seien. Die Kugel $K_{\mu-1}$ um a als Mittelpunct werde so klein angenommen, dass sowohl $G_{\mu-1}$ im Innern von K_{n-1} liegt, wie auch, dass *alle Puncte* b, b' b'', ... *ausserhalb* $K_{\mu-1}$ fallen. Dies ist erreichbar wegen der Stetigkeit, *die es verhindert*, dass die Puncte b, b', b'', ... dem Puncte a unendlich nahe kommen.

Nun dürfte kein Zweifel mehr sein, dass *eine* der Linie APB entsprechende Curve in M_μ von a zu *einem* der Puncte b, b', b'', ... hinführt und dabei die Kugel $K_{\mu-1}$ treffen muss.

Nachdem ich diese Karte gesbrieben, erhalte ich Ihren Brief, für welchen bestens danke. Die Antwort darauf später, da ich soeben zu einer Gesellschaft muss.

(*) [Vgl. *Allgemeine Sätze über Räume* aus dem Nachlass (*Ges. Werke* Bd. II, S 352)].

[Karte : Poststempel 21.1.79.]

Gestern Abend konnte ich, da ich im Begriffe war, auszugehen meiner bereits vollendeten Karte nur noch die Empfangsanzeige Ihres Briefes beifügen. Den einen Ihrer Einwürfe habe ich in jener Karte anticipiert ; was den andern anbetrifft, wonach das Gebilde $G_{\mu-1}$ den Punct A enthalten kann, so erscheint mir derselbe in der That eine Schwierigkeit anzuzeigen, die ich augenblicklich nicht völlig überwinden kann, die aber vielleicht dadurch gehoben werden kann, dass ich den Punct A, für welchen ja ein so grosser Spielraum vorliegt, passend annehme. Jedenfalls lag es in meiner Absicht, die Mehrdeutigkeit beim Uebergange von der höheren zur niederen *M. so allgemein* zuzulassen, dass zu einem Puncte von M_n auch *unendlich viele* Puncte von M_μ gehören ; es wäre mir daher auch *gar nicht recht*, wenn ich, um meinen Beweis zu retten, diese Annahme *beschränken* müsste. Jedenfalls denke ich *nur in dem Falle* an eine Publication, dass es mir gelingen sollte, diesen Punct gleichfalls zu erledigen.

Halle a/S. d. 22[ten] Dec. 1879.

Sie werden vor einiger Zeit von mir eine kleine Note (*) über einen Beweis eines Herrn Appell erhalten haben. Vielleicht interessiert Sie folgende Erläuterung. Appell wendet folgenden Satz an : « wenn $f(n, x)$ für jeden speciellen Werth von $x \geqq \alpha$ u. $\leqq \beta$ für $n = \infty$ ∞ klein wird und es ist $f(n, x)$ stetige Function von x, B_n das absolute Maximum derselben, so wird Lim $B_n = 0$ für $n = \infty$. » Dass dieser Satz (im Allgemeinen) falsch ist, zeigt folgendes Beispiel :

$$f(n, x) = e^{-\left(\frac{nx}{1-x} + \frac{1-x}{nx}\right)}, \text{ für } 0 < x < 1,$$

mit den Nebenbestimmungen $f(n, 0) = f(n, 1) = 0$. Diese Function ist stetige F. von x für $0 \leqq x \leqq 1$; es ist ferner für jedes specielle $x \geqq 0$ u. $\leqq 1$: Lim $f(n, x) = 0$ für $n = \infty$. Das Maximum von $f(n, x)$ ist für jedes specielle n, wie leicht zu sehen, $= e^{-2}$,

(*) [*Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen Math. Ann*, XVI (1880) (*Ges Abhandl.*, S 104)].

also : $B_n = e^{-2}$; *hier wird also B_n nicht ∞ klein.* Dass im Falle

$$f(n, x) = a_n \sin nx + b_n \cos nx,$$

B_n mit wachsendem n ∞ klein wird, *folgt* erst aus meinem Beweise, darf aber nicht *vorausgesetzt* werden, weil der Beweis sonst wie in der That bei Appell, zu einem circulus vitiosus wird.

Die in den letzten Monaten in den comptes rendus veröffentlichten functionentheoretischen Resultate Em. Picard's haben mir sehr gut gefallen ; wenn dieser junge Mathematitker in dieser Weise fortfährt, können wir von ihm noch manches Schöne erwarten.

Wie ich nachträglich sehe, erfüllt das Beispiel

$$f(n, x) = \frac{nx\,(1 - x)}{n^2x^2 + (1 - x)^2}$$
$$\text{für } 0 \leqq x \leqq 1.$$

denselben Zweck, wie das obige und ist einfacher !

Berlin d. 7 April 1882.

.....Als Specialität erlaube ich mir Sie auf folgendes aufmerksam zu machen, vielleicht haben Sie dies schon selbst bemerkt.

Hat man ein n-fach ausgedehntes stetig zusammenhängendes Gebiet A und in ihm eine überalldicht verbreitete, jedoch *abzählbare* Punctmenge (M_ν), so ist für $n \leqq 2$ das Gebiet $\mathfrak{A}$, welches nach Abzug der Menge (M_ν) von A übrig bleibt, auch noch stetig zusammenhängend, in dem Sinne, dass je zwei Puncte N u. N′ desselben durch unzählig viele continuirliche, analytisch definirbare, innerhalb desselben Gebietes $\mathfrak{A}$ verlaufende Linien verbunden werden können auf welchen also kein einziger Punct der Menge (M_ν) liegt. *Bewegung* ist also in gewissem Sinne auch in solchen Räumen $\mathfrak{A}$ möglich (*).

Die allgemeine Richtigkeit dieses Satzes erkennt man am leichtesten aus meinem Satze, dass, wenn eine reelle Grössenreihe :

$$\omega_1, \omega_2, .., \omega_\nu, ...$$

(*) [In ähnlicher Fassung veröffentlicht in d. Arbeit *Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* § 3. *Math. Ann.* XX. (*Ges. Abhandl.*, S. 154)].

vorliegt, in jedem Intervall (α, β) Grössen η vorkommen, welche keinem ω_ν gleich sind. In der That nehmen wir $n = 2$, also A eben an, so kann man zuerst die Puncte N N′ unbekümmert um (M_ν) durch eine stetige Linie L verbinden, auf dieser eine endliche Anzahl nicht zu (M_ν) gehörige Puncte $N_1, N_2, \ldots N_k$ so annehmen, dass die Strecken $NN_1, N_1N_2, \ldots N_kN'$ ganz in das Innere von A fallen und nun diese Strecken durch Kreisbögen mit denselben Endpuncten *ersetzen*, auf welchen kein einziger Punct aus (M_ν) liegt.

Nehmen wir z. B. die Strecke NN_1; durch die beiden Puncte N u. N_1 geht eine einfach unendliche Kreisschaar, deren Mittelpuncte auf einer Geraden g liegen und auf dieser durch eine Coordinate u fixiert werden mögen. Für u lässt sich ein Intervall (α, β) so geben, dass allen innerhalb desselben liegenden Werthen von u Kreisbögen entsprechen die auch ganz innerhalb A verlaufen. Denjenigen Kreisen der Schaar, welche ausser durch N u. N_1 noch durch die Puncte

$$M_1, M_2, M_3, \cdots, M_\nu, \cdots$$

gehen, entsprechen Werthe von u, die mit :

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu, \cdots$$

bezeichnet werden sollen.

Man nehme nun innerhalb (α, β) einen Werth η an, der keinem ω_ν gleich ist, so erhält man durch die Annahme $u = \eta$ einen die Puncte N u. N_1 verbindenden, ganz in A gelegenen, Kreisbogen, auf welchem *kein einziger Punct M_ν liegt*. w.z.b.w...

W. Berlin d. 15. April 1882.

Ich hätte gern Ihre Rückäusserung über den mathem. Inhalt meines letzten Briefes, vorausgesetzt dass Sie in dessen Besitz gelangt sind, was ich in Zweifel ziehe.

Mein Interesse an der Sache ist nämlich folgendes : nach den Untersuchungen und Resultaten, zu denen wir beide unabhängig von einander hinsichtlich des irrationalen Zahlbegriffs und dessen im Kummerschen Sinn idealer Natur vor längerer Zeit gelangt sind, stand fest, dass bei der Bildung des Raumbegriffes keine innere Nöthigung vorliegt, ihn überall stetig sich vorstellen ; Sie

machen darauf ausdrücklich in Ihrer Schrift über die Stetigkeit aufmerksam. — Es lag daher nahe, die Stetigkeit des Raumes aus äusseren Gründen, namentlich aus dem Factum der stetigen Ortsänderung d.i. der Bewegung zu folgern, und es war dies in der That längere Zeit meine Meinung.

Nun wird aber letztere durch die Erkenntnis hinfällig, dass in einem so durchgängig unstetigen Raume, wie ich ihn in meinem Schreiben mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet habe, stetige Ortsänderung von jedem Puncte zu jedem andern möglich ist ; und man könnte daher eine modificierte Mechanik sich denken, die für Räume $\mathfrak{A}$ gültig wäre ?...

Halle a/S. 15 Sept. 82.

...Beifolgend (*) ein Versuch zur Formulierung der mich seit lange interessirenden Frage, was unter einem *Continuum* zu verstehen sei ; bitte denselben nachsichtig zu beurtheilen ; wenn Sie es nicht für unnütz halten, so können wir den Gegenstand mündlich discutieren.

Ein Versuch, Ihren Schnittbegriff zu verallgemeinern und für die allgemeine Definition des Continuums zu verwerthen, wollte mir nicht gelingen. Dagegen schien mein Ausgangspunct der abzählbaren « Fundamentalreihen » (so nenne ich jetzt Reihen, bei denen die Elemente *einander* unendlich nahe rücken) sich zwanglos dem Versuche zu accomodiren.

Für lineare, d. h. in einer Geraden enthaltene Punctmannichf. kann ich leicht mit Hülfe meiner Sätze zeigen, dass nur ein vollständiges Intervall den Bedingungen A und B genügt (+).

Desgleichen dürfte es für Punctmannichf., welche in einer Ebene liegen, gelingen zu zeigen, dass wenn A und B an ihnen erfüllt sind, sie entweder geschlossene einstückige Linien oder von solchen begrenzte Flächen sind (+)...

(+) vorausgesetzt dass man für $[m,n]$ die Entfernung der beiden Puncte, m,n nimmt.

P. S. Eine abzählbare Menge dürfte in Bezug auf keinerlei Ordnung als Continuum auffassbar sein. Dagegen jede nicht abzählbare Menge wahrscheinlich immer in Bezug auf gewisse Ordnungen als Continuum betrachtet werden kann.

(*) [S. am. Schluss des Briefes hinter dem Postskriptum.]

I (*) M sei *irgend* eine aus unendlich vielen Elementen $m,n,p.$ bestehende wohldefinierte Mannigfaltigkeit.

Jeder Combination von zwei Elementen m und n der Menge werde in bestimmter (*jedoch ganz willkürlicher*) Weise eine reelle positive, (*von Null verschiedene*) Zahl zugeordnet, die mit $[m,n]$ bezeichnet werde ; sie kann gewissermassen als Function der Combination m,n betrachtet werden. Umgekehrt werden durch diese Function $[m,n]$ gewisse Beziehungen unter die Elemente von M gebracht, so dass $m,n,p,\ldots$ die ursprünglich ohne Verhältnisse einander gegenüberstanden, nun in eine gewisse Ordnung O gebracht erscheinen ; wir wollen diese Ordnung O die durch die Function $[m,n]$ bewirkte Ordnung von M nennen. Jede andere Function $[m,n]'$, sofern sie mindestens in einem Gliede von jener $[m,n]$ verschieden ist, bewirkt eine andere Ordnung O′ *derselben Mannichf*. M.

II M soll *in Bezug* auf die durch die Function $[m,n]$ bewirkte Ordnung O ein *Continuum* genannt werden, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind :

A Sind m,n zwei beliebige Elemente von M und ist ε eine willkührlich vorgegebene Grösse, so lässt sich stets eine endliche Anzahl von Elementen $m_1,m_2 \,..\, m_k$ von M angeben, so dass :

$$[m, m_1],\ [m_1, m_2], \cdots [m_{k-1}, m_k],\ [m_k,n],$$

sämmtlich kleiner sind als ε.

B Ist $m_1,m_2,..,m_\nu$, irgend eine abzählbar unendliche Menge von Elementen der M von solcher Beschaffenheit dass :

$$\lim\, [m_{\nu+\mu},m_\nu] = 0 \qquad \text{f. } \nu = \infty,$$

so giebt es immer *ein* und *nur* ein Element m von M, so dass auch

$$\lim\, [m, m_\nu] = 0 \qquad \text{f. } \nu = \infty.$$

III Daraus folgt klar, dass eine und dieselbe Menge M in Bezug auf *eine* Ordnung O ein Continuum, in Bezug, auf eine *andere* Ordnung O' ein Discontinuum sein kann. So ist ein Quadrat mit Einschluss seiner Begrenzung ein Continuum mit Bezug auf diejenige Ordnung, bei welcher $[m,n]$ die geradlinige Entfernung der Puncte m und n ist ; dagegen ist dasselbe Quadrat ein Disconti-

(*) [Gesondertes Blatt, auf das C. sich am Anfang dieses und des nächsten Briefes bezieht.]

nuum mit Bezug auf eine Ordnung, die sich ergiebt, wenn man es gegenseitig eindeutig und vollständig auf eine *Strecke* abbildet, so dass den Puncten $m,n,p,.$ die Puncte m', n', $p',..$ der Strecke entsprechen, und man $[m,n]$ gleich nimmt der Entfernung der beiden entsprechenden Puncte m',n'.

Halle, 15. Sept. 82.

Halle a/S. 30. Sept. 1882.

...Wenn Ihnen das Blättchen über den Begriff des Continuums in die Hände fällt, so vergessen Sie nicht, den letzten Passus zu streichen, weill er auf einem Irrthum beruht.

Offenbar ist das Quadrat auch in der Ordnung, in welcher ich es dort auffasste ein Continuum, jedoch ein solches von nur einer Dimension.

Dagegen liesse sich mit Leichtigkeit eine andere Ordnung feststellen, in welcher das Quadrat zu einem Discontinuum wird. — Die Grundgedanken sind die, dass von einem Continuum nur die Rede sein kann *mit Bezug* auf eine bestimmte durch eine Function $[m, n]$ bewirkte Ordnung der Elemente ; ferner die *beiden unter A* und *B* hervorgehobenen Merkmale des Continuums mit Bezug auf eine gegebene Ordnung. Ich hoffe nächstens Zeit zu finden diese Gedanken näher zu erläutern und vielleicht zu publicieren.

[Karte, Poststempel 2.10.82.]

Zu den Bedingungen A u. B des Continuums *mit Bezug* auf eine *gegebene Ordnung O* muss, wie ich finde, noch eine C hinzugefügt werden, die keineswegs im Allgemeinen eine Folge der vorhergehenden ist ; nämlich :

C. (Umkehrung von B). Ist m ein Element von M, m_ν eine abzählbar unendliche Menge von Elementen, so dass :

$$\lim\, [m, m_\nu] = 0 \qquad \text{f. } \nu = \infty,$$

so muss auch immer sein : Lim $(m_{\nu+\mu}, m_\nu] = 0$ f. $\nu = \infty$ bei beliebigem h.

Hiermit dürfte alles aber erschöpft sein, was von einem Continuum verlangt werden kann.

Halle a. S. 5[ten] Nov. 1882.

...Es ist für mich die Lücke um so empfindlicher, als ich seit einer Reihe von Jahren mich daran gewöhnt habe, meine inneren mathematischen Erlebnisse Ihrem gereiften Urtheil zu unterbreiten und gerade seit unserm jüngsten Zusammensein in Harzburg und Eisenach hat es Gott der Allmächtige geschickt, dass ich zu den merkwürdigsten, unerwartetesten Aufschlüssen in der Mannigfaltigkeitslehre und in der Zahlenlehre gelangt bin oder vielmehr dasjenige gefunden habe, was in mir seit Jahren gegährt hat, wonach ich lange gesucht habe. — Es handelt sich nicht um die allgemeine Definition eines Punctcontinuums (*), von welcher wir sprachen und in welcher ich weiter gekommen zu sein glaube, sondern um etwas viel Allgemeineres und daher Wichtigeres. —

Sie erinnern sich, dass ich in Harzburg Ihnen sagte, es sei mir nicht möglich folgenden Satz zu beweisen :

« Ist M' Bestandtheil einer Mannigf. M, M'' Bestandtheil von M', und lassen sich M und M'' gegenseitig eindeutig einander zuordnen, d. h. haben M und M'' gleiche Mächtigkeit, so hat auch M' dieselbe Mächtigkeit wie M und M''. »

Nun habe ich die Quelle dieses Satzes gefunden und kann ihn streng und mit der nöthigen Allgemeinheit beweisen, womit eine wesentliche Lücke in der Mannigfaltigkeitslehre ausgefüllt ist.

Dazu komme ich durch eine natürliche Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe, die mich successive mit der grössten Sicherheit zu den aufsteigenden Mächtigkeiten führt, deren präcise Definition, abgesehen von der ersten durch die Zahlenreihe $1, 2, 3, .., \nu, ...$ gegebenen, mir bislang gefehlt hat. —

Ich nenne die Reihe $1, 2, 3, .., \nu, ...$ erste ganze reale Zahlenclasse und bezeichne sie mit (ν). —

Zu der *zweiten* ganzen realen Zahlenclasse komme ich wie folgt :

so wie die Zahl ν der Ausdruck ist für eine bestimmte Anzahl von Setzungen der Einheit und für deren Vereinigung, schaffe ich zunächst eine neue Zahl ω, welche der Ausdruck dafür sein soll,

(*) [Vgl. die Oktober 1882 datierte, dieselben Themen ausführlicher behandenlde Arbeit *Ueber unendl. lineare Punktmannigfaltigkeiten* Nr. 5 (*Math. Ann.* 21, *Ges. Abhandl.*, S. 165)].

dass der ganze Inbegriff (ν) gegeben sei; ich kann ω als Grenze der Zahlen ν mir denken, wenn darunter nichts anderes gemeint ist, als dass ω die erste nach *allen* ν geschaffene ganze Zahl sei, d. h. die *erste*, welche grösser genannt werden soll, als alle ν.

Wende ich auf ω die Hinzufügung einer Einheit an, wie früher auf ν, so erhalte ich eine neue Zahl $\omega + 1$, welche ausdrückt, dass zuerst ω gesetzt ist, *dann* die Einheit hinzugefügt und mit ω zu einer neuen Zahl vereinigt sei. Ich nenne den Uebergang von einer Zahl ν oder ω zur *nächst* folgenden das *erste Erzeugungsmoment*; dagegen den Uebergang einer fortlaufenden Menge von ganzen Zahlen die kein Grösstes haben zur ihnen allen nächst grösseren, das *zweite* Erzeugungsmoment.

Die Bildung der Zahl ω erfolgt also durch das *zweite* Erzeugungsmoment, die der Zahl $\omega + 1$ durch das *erste*. —

Wendet man nun diese *beiden* Erzeugungsmomente wiederholt an, so kommt man zu einer mit bestimmter Succession fortschreitenden Erweiterung unserer Zahlenreihe:

$$1, 2, 3, \cdots \nu, \quad \omega, \omega + 1, \cdots \omega + \nu \cdots, \quad 2\omega, 2\omega + 1, \cdots, \mu\omega + \nu, \cdots$$
$$\cdots \lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu, \cdots, \sigma\omega^k + \rho\omega^{k-1} + \cdots + \mu\omega + \nu, \cdots$$
$$\cdots \text{u, s. w.} \quad \text{u. s. w.}$$

Der erste Eindruck, welchen diese Reihe bei Ihnen verursachen dürfte, wird der sein, dass man nicht sieht, wie man bei ihrer Fortsetzung zu einer Art von Abschluss gelangen kann, der doch nöthig wäre, wenn uns dadurch eine *neue bestimmte* Mächtigkeit und zwar die auf die Mächtigkeit erster Classe *nächst* folgende Mächtigkeit der *zweiten* Classe geliefert werden soll. —

Um diesen Abschluss zu bewirken, kommt zu den beiden oben definierten Erzeugungsmomenten noch ein *drittes* Moment, ich nenne es *Beschränkungsmoment* hinzu, welches in der Forderung besteht nur dann die Schöpfung einer neuen ganzen Zahl mit Hülfe eines der beiden anderen Momente vorzunehmen, wenn die Gesammtheit aller voraufgegangenen Zahlen in einer ihrem ganzen Umfange nach bereits vorhandenen, bekannten Zahlclasse *abzählbar ist.*

Auf diesem Wege, mit Beobachtung aller dieser drei Momente kann man mit der grössten Sicherheit zu immer neuen Zahlclassen und zu deren Mächtigkeiten gelangen und die auf solche Weise erhaltenen neuen Zahlen sind dann immer durchaus von derselben

concreten Bestimmtheit und Realität wie die älteren. Ich wüsste also wahrlich nicht was uns von dieser Thätigkeit des Bildens neuer ganzer Zahlen zurückhalten sollte, sobald es sich zeigt, dass für den Fortschritt d. Wissenschaften die Einführung einer neuen von diesen unzähligen Zahlclassen wünschenswerth oder gar unentbehrlich geworden ist ; und das letztere scheint mir in der That bei der Mannigfaltigkeitslehre, vielleicht aber auch noch in viel weiterem Umfange der Fall zu sein, wenigstens komme *ich ohne* diese Erweiterung nicht mehr vorwärts, *mit* ihr gelingt mir Vieles ganz Unerwartete. —

Wir müssen natürlich zunächst bei der *zweiten* Zahlclasse stehen bleiben, ich nenne sie (α), sie enthält in ihrem Anfange die erste (ν). Nach obigem ist (α) dadurch characterisirt, dass die einer bestimmten Zahl α *voraufgehenden* $1, 2, 3, \ldots\ \omega, \omega + 1, \ldots, \omega^2, \ldots$ *immer* eine Menge bilden, welche (abgesehen von ihrer natürlichen Anordnung) in der *ersten* Classe abzählbar ist.

Mit voller Strenge lässt sich nun beweisen dass der Inbegriff (α) *selbst nicht* in der ersten Classe abzählbar ist.

Der Zahleninbegriff (α) hat also eine *andere* Mächtigkeit wie (ν) und zwar die *nächst* höhere ; denn ich kann strenge folgenden Satz beweisen :

« Ist (α') irgend ein Bestandtheil von (α), so ist *entweder* (α') endlich, *oder* in der ersten Classe abzählbar, *oder* es *lässt* sich (α') gegenseitig eindeutig dem Inbegriffe (a) selbst zuordnen, d. h. es ist (α') *abzählbar* in der *zweiten* Classe ; Quartum non datur. »

Ferner glaube ich strenge beweisen zu können, dass der Inbegriff aller unserer *reellen*, rationalen *und* irrationalen Zahlen sich eindeutig auf (α) beziehen lässt, wodurch in Rücksicht auf den vorangegangenen Satz der *Zweiclassensatz* für unendliche lineare (oder auf diese durch Abbildung zurückführbare) bewiesen ist. —

Vielleicht wundern Sie sich über meine Kühnheit, die Dinge $\omega, \omega + 1, \ldots, \alpha, \ldots$ auch *ganze* Zahlen, und zwar die *ganzen*, *realen* Zahlen der zweiten Classe zu nennen, während ich sie doch bisher, wo ich mich ihrer (in den Annalen Bd. 17,20 und 21) bediene, bescheiden : Unendlichkeitssymbole genannt habe.

Doch erklärt sich diese meine Freiheit aus der Bemerkung, dass unter den Gedankendingen α, die ich ganze reale Zahlen der *zweiten* Classe nenne, Beziehungen vorhanden sind, die sich auf die Grundoperationen zurückführen lassen. —

Freilich sind die zwischen ihnen herrschenden Gesetze wesentlich andere und compliciertere, schwerer durch Induction findbare, als in unserer Zahlentheorie, welche sich auf die älteren Zahlen bezieht. Schon bei der Addition findet sich, dass das *commutative* Gesetz im Allgemeinen nicht besteht ; $\alpha + \beta$ ist im allgemeinen *nicht* $= \beta + \alpha$.

Man erkennt dies sehr leicht, indem man findet, dass $1 + \omega = \omega$, dagegen $\omega + 1$ von ω wohlunterschieden ist.

Die Subtraction definirt man wenn $\beta < \alpha$, durch die Gleichung :

$$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta,$$

nicht aber durch die Gleichung : $(\beta - \alpha) + \alpha = \beta$, welche im Allgemeinen nach $(\beta - \alpha)$ nicht lösbar ist. Ist α Multiplicandus β Multiplicator, so hat man auch eine bestimmte Zahl in (α) die das Product :

$$\alpha\beta$$

ist ; doch auch hier findet sich, dass im Allgemeinen $\beta\alpha$ *von* $\beta\alpha$ verschieden ist.

Das *associative* Gesetz ist jedoch auch in der zweiten Classe sowohl bei der Addition wie bei der Multiplication gültig, man hat :

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$
$$\alpha(\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma.$$

Vom distributiven Princip gilt nur die eine Hälfte es ist :

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Unter den Zahlen (α) findet sich eine natürliche Unterscheidung solcher Zahlen α die mit Hülfe des *ersten* Erzeugungsmoments entstanden sind also eine *nächste* vorhergehende haben, welche ich α_{-1} nenne (sie ist von $\alpha - 1$ im Allgemeinen verschieden, weil $\alpha - 1 = \alpha$ für $\alpha \geqq \omega$) von solchen Zahlen α die kein nächst vorangehendes in der Reihe haben und für welche also α_{-1} sinnlos ist. Bei der ersteren Art sind die nicht zerlegbaren, welche man wohl Primzahlen nennen darf, vor den übrigen ausgezeichnet. —(+)

(+) Es scheint mir (doch bin ich noch nicht ganz sicher) *(*)* jede Zahl α auf eine einzige Weise in folgender Form darstellbar :

$$a = c_0 \cdot \pi \cdot c_1 \cdot \pi' \cdot c_2 \cdot \pi'' \cdots c_{\nu-1} \cdot \pi^{(\nu-1)} \cdot c_\nu \cdot \rho$$

wo $c_0, c_1, .. c_{\nu-1}, c_\nu$ positive ganze Zahlen aus (ν), $\pi, \pi', \pi'', \ldots$ Primzahlen aus (α), endlich ρ eine solche Zahl aus (α) der zweiten Art, (für welche also e_{-1} nicht exis-

So viel ich sehen kann, lassen sich unsere endlichen Irrationalzahlen verhältnismässig einfach unter Zuhülfenahme der Zahlen α bestimmen, was ich noch weiter verfolgen will. —

Unter P verstehe man den Inbegriff der in der Formel :

$$z = \alpha_1 \cdot \frac{1}{3} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{3^2} + \cdots + \alpha_\nu \cdot \frac{1}{3^\nu} + \cdots$$

enthaltenen Zahlen, bei welchen α_ν, nur die Werthe 0 und 2 erhält.

P hat alsdann die beiden Eigenschaften :

1) $P \equiv P'$

2) P ist in keinem Intervalle überalldicht.

Aufgabe. M sei eine beliebige Mannigfaltigkeit von Elementen ; M_1 ein echter Theil von M, M_2 ein echter Theil von M_1 ; es wird vorausgesetzt eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen M und M_2 ; zu zeigen ist, dass auch M und M_1, folglich auch M_1 und M_2 *gleiche Mächtigkeit* haben.

(Karte : Poststempel 6/11.82.)

Ich glaube, dass ich in meiner gestrigen Auseinandersetzung einen Schreibfehler gemacht, der zu einem Irrthum Anlass geben könnte.

Im Product :

$$\alpha = \beta\gamma$$

---

tiert) dass sie *durch keine Zahl der ersten Art theilbar ist.* Diese Zahlen der zweiten Art haben einen ganz eigenen Character, da z.B. $\omega = \omega.\nu$, wo ν eine Zahl aus (ν) ist. Daher kann bei ρ von einer *bestimmten* Zerlegung nicht wohl die Rede sein. — Daher kann auch man eigentlich gar nicht von Primzahlen der *zweiten* Art sprechen.

Zu bemerken ist noch, dass wenn ich sage α ist durch β theilbar ich die Möglichkeit der Gleichung :

$$\alpha = \beta\gamma$$

behaupte, wo β *Multiplicandus* ist. Diese Fixierung des Begriffes der Theilbarkeit scheint mir in der Zahlclasse (α) geboten.

(*) [Wie bekannt, wurde diese Zerlegung erst ausgeführt und bewiesen in der 1897 veröffentlichten Arbeit *Beiträge zur Begründung der Mengenlehre Ges. Abhandl.*, S. 343)].

ist für mich β der *Multiplicator*, γ der Multiplicandus, ich sage α ist durch β theilbar wenn α als Product dargestellt werden kann in welchem β *Multiplicator* ist.

G. C.

In diesem Sinne ist auch die von mir als allgemein gültig vermuthete Zerlegung zu verstehen :

$$\alpha = c_0 \pi c_1 \pi' \cdots c_{\nu-1} \pi^{(\nu-1)} c_\nu \cdot \rho$$

TABLE DES MATIÈRES

Saint-Amand (Cher). — Imp. R. Bussière — 15-9-1937

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE R. BUSSIÈRE.